Factorisations pour la théorie des automates

Thomas Colcombet
Cnrs, Irisa

Sminaire 68NQRT, jeudi 3 mai 2007

Quelques motivations

Comment complémenter sans (pouvoir) déterminiser ?

Comment effectuer des preuves sur A^* quand l'induction sur la longueur ne fonctionne pas ?

Comment accélerer un calcul d'automate sur un mot fini?

PLAN

Théorème de Ramsey

Théorème des forêts de factorisation

Variantes

Ramsey (version infinie dénombrable)

Th: Soit $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C$ (C ensemble fini). Il existe $E \subseteq \mathbb{N}$ infini et $d \in C$ tq

$$\forall (x < y) \in E.\ c(x, y) = d\ .$$

Ramsey (version infinie dénombrable)

Th: Soit $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C$ (C ensemble fini). Il existe $E \subseteq \mathbb{N}$ infini et $d \in C$ tq

$$\forall (x < y) \in E.\ c(x, y) = d\ .$$

Preuve:

$$
\begin{array}{lll}
N_0 = \mathbb{N} & & u_0 = \min N_0 \\
N_1 = \{x \in N_0 \setminus \{u_0\}\ :\ c(u_0, x) = c_1\} & \text{tq } N_1 \text{ infini} & u_1 = \min N_1 \\
N_2 = \{x \in N_1 \setminus \{u_1\}, :\ c(u_1, x) = c_2\} & \text{tq } N_2 \text{ infini} & u_1 = \min N_2 \\
\quad\vdots & &
\end{array}
$$

Ramsey (version infinie dénombrable)

Th: Soit $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C$ (C ensemble fini). Il existe $E \subseteq \mathbb{N}$ infini et $d \in C$ tq

$$\forall (x < y) \in E.\ c(x, y) = d\ .$$

Preuve:

$$\begin{array}{lll}
N_0 = \mathbb{N} & & u_0 = \min N_0 \\
N_1 = \{x \in N_0 \setminus \{u_0\}\ :\ c(u_0, x) = c_1\} & \text{tq } N_1 \text{ infini} & u_1 = \min N_1 \\
N_2 = \{x \in N_1 \setminus \{u_1\},:\ c(u_1, x) = c_2\} & \text{tq } N_2 \text{ infini} & u_1 = \min N_2 \\
\quad \vdots & &
\end{array}$$

Les N_i sont tous infinis et forment un chaine décroissante.

Soit d tq $\exists^\infty i. c_i = d$.

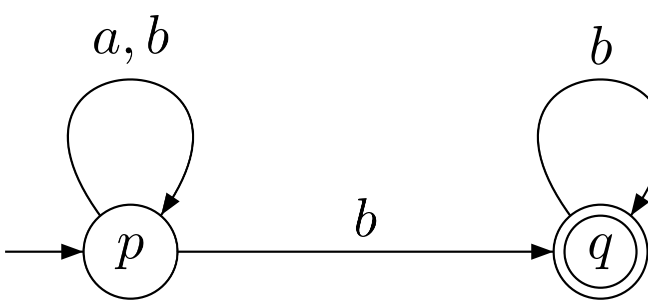
Soit $E = \{u_i\ :\ c_i = d\}$.

AUTOMATES DE BÜCHI

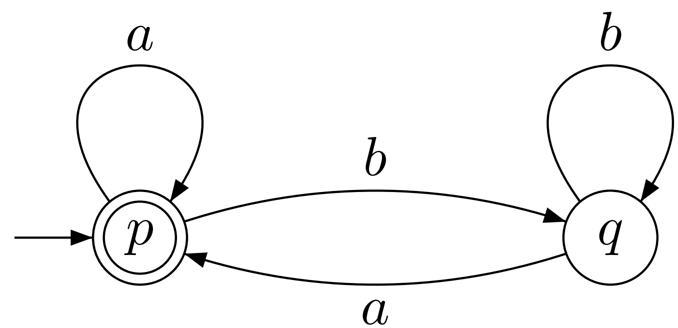
Automates de Büchi: Automate non-déterministe, sans état final + ensemble d'états marqués B.

Un mot infini est accepté s'il existe une exécution de l'automate sur le mot visitant infiniement souvent B.

Exemple:



Ultimement b.



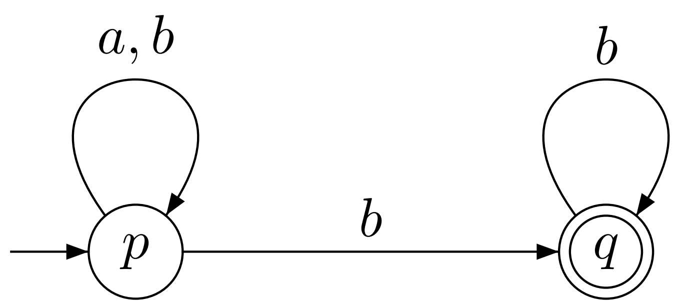
Infiniement souvent a

AUTOMATES DE BÜCHI

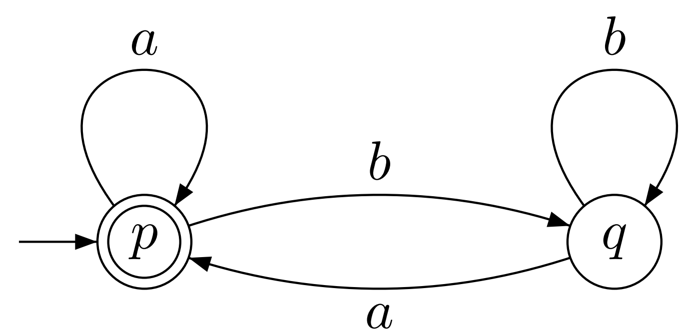
Automates de Büchi: Automate non-déterministe, sans état final + ensemble d'états marqués B.

Un mot infini est accepté s'il existe une exécution de l'automate sur le mot visitant infiniement souvent B.

Exemple:



Ultimement b.



Infiniement souvent a

Th(Büchi 60): Les langages acceptés par les automates de Büchi sont clos sous union, intersection, projection et **complémentation**.

SEMIGROUPE $\Leftrightarrow$ AUTOMATE

Structure de semigroupe: $(S, .)$, avec

$$S = \mathcal{P}(Q \times \{0,1\} \times Q)$$
$$a.b = \{(p, \max(i,j), r) \ : \ (p,i,q) \in a, \ (q,j,r) \in b\}$$

Morphisme de semigroupe: Étant donné un mot u,

$$\varphi(u) \ni \begin{cases} (p,0,q) & \text{s'il existe une exécution de } p \text{ à } q \text{ sur } u \text{ ne visitant pas } B \\ (p,1,q) & \text{s'il existe une exécution de } p \text{ à } q \text{ sur } u \text{ visitant } B \end{cases}$$

$$\varphi(u.v) = \varphi(u).\varphi(v)$$

Rq: Marche pour tout type d'automate (sur mots finis/infinis, déterministes, non-déterministes, alternants, bidirectionnels. . .)

COMPLÉMENTATION AUTOMATES DE BÜCHI

Application de Ramsey: Tout mot infini u s'écrit:

$$u = vw_1w_2\dots \qquad \text{avec} \quad \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = \dots$$

Application de Ramsey: Tout mot infini u s'écrit:

$$u = vw_1w_2\ldots \qquad \text{avec} \quad \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = \ldots$$

Equivalence sémantique: et dans ce cas

$$\begin{aligned} vw_1w_2\cdots \in L \qquad &\Leftrightarrow \qquad vw_1^\omega \in L \\ &\Leftrightarrow \qquad (\varphi(v), \varphi(w_1)) \in A = \{(\varphi(u), \varphi(w)) \;:\; uw^\omega \in L\} \end{aligned}$$

Complémentation automates de Büchi

Application de Ramsey: Tout mot infini u s'écrit:

$$u = vw_1w_2\dots \qquad \text{avec} \quad \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = \dots$$

Equivalence sémantique: et dans ce cas

$$\begin{aligned} vw_1w_2\dots \in L \quad &\Leftrightarrow \quad vw_1^\omega \in L \\ &\Leftrightarrow \quad (\varphi(v), \varphi(w_1)) \in A = \{(\varphi(u), \varphi(w)) \,:\, uw^\omega \in L\} \end{aligned}$$

Donc:

$$\complement L = \sum_{(a,b)\notin A} \varphi^{-1}(a).\varphi^{-1}(b)^\omega$$

Complémentation automates de Büchi

Application de Ramsey: Tout mot infini u s'écrit:

$$u = vw_1w_2\ldots \qquad \text{avec} \quad \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = \ldots$$

Equivalence sémantique: et dans ce cas

$$\begin{aligned} vw_1w_2\cdots \in L \qquad &\Leftrightarrow \qquad vw_1^\omega \in L \\ &\Leftrightarrow \qquad (\varphi(v), \varphi(w_1)) \in A = \{(\varphi(u), \varphi(w)) \ : \ uw^\omega \in L\} \end{aligned}$$

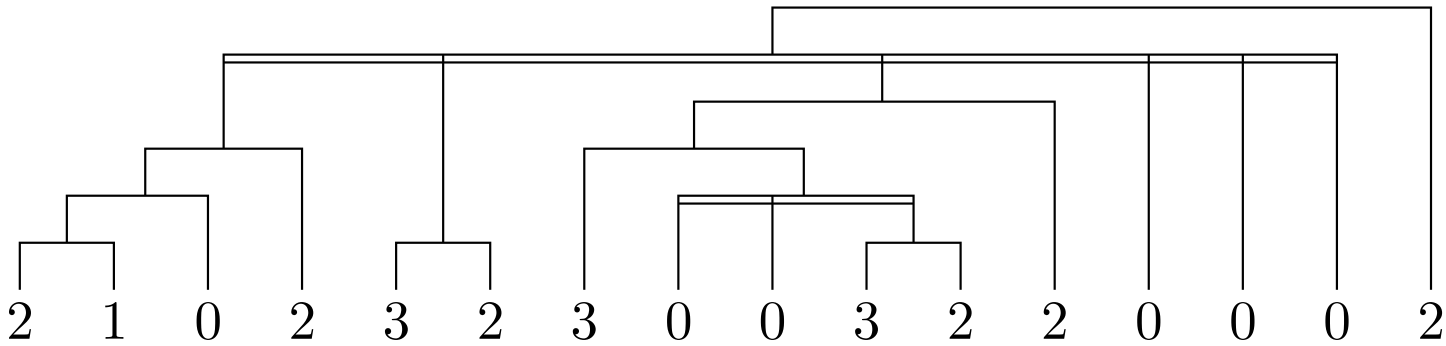
Donc:

$$\complement L = \sum_{(a,b)\notin A} \varphi^{-1}(a).\varphi^{-1}(b)^\omega$$

Conlusion: Et cette expression se traduit aisément en automate car $\varphi^{-1}(a)$ et $\varphi^{-1}(b)$ sont réguliers.

Forêts de factorisation

On considère $S = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ et le mot '210232300322002'.

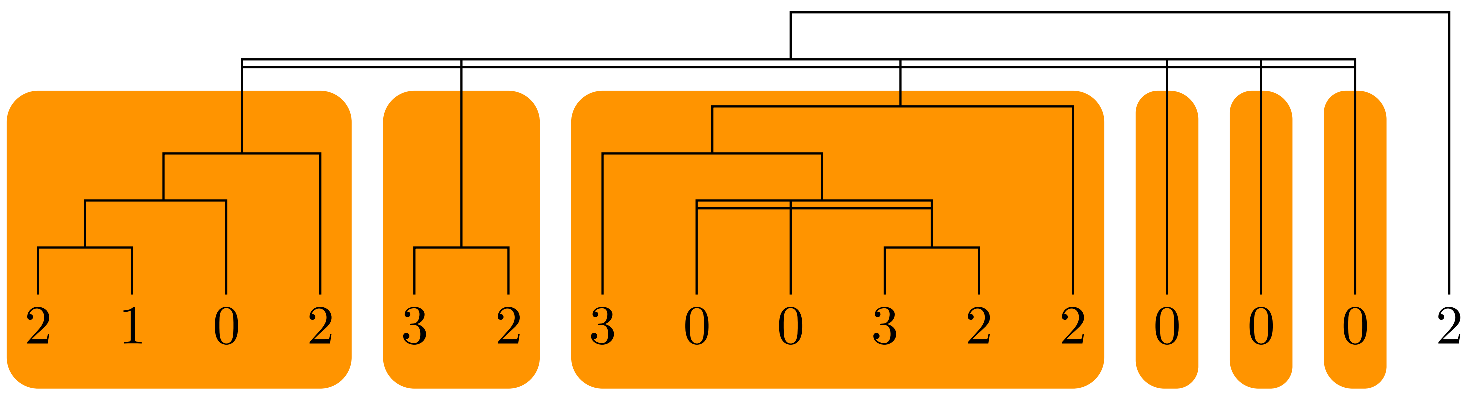


Un arbre est ramseyen si tout nœud

- est une feuille étiquetée par une lettre, ou
- a exactement deux fils,
- tous ses fils ont pour valeur le même idempotent de S.

Forêts de factorisation

On considère $S = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ et le mot '210232300322002'.

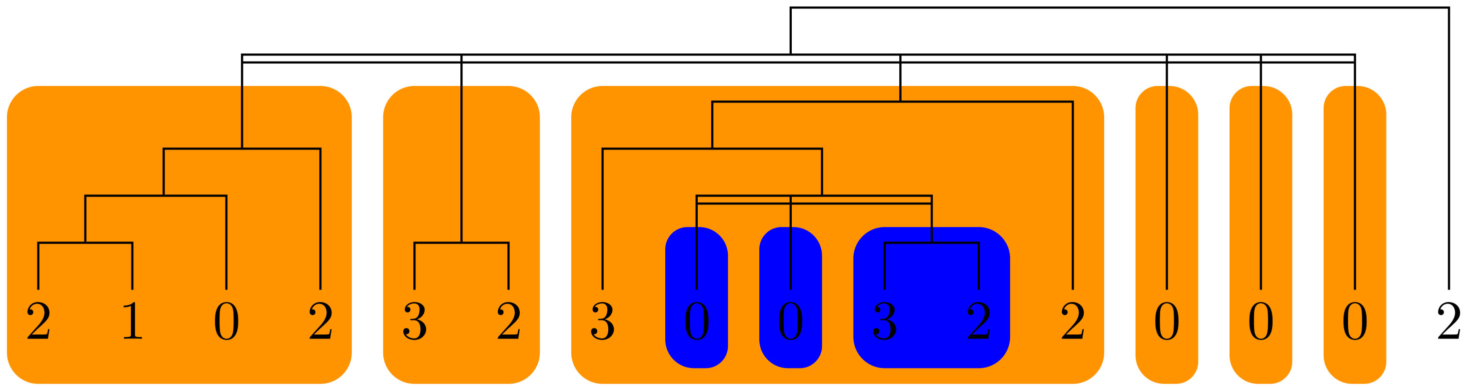


Un arbre est ramseyen si tout nœud

- est une feuille étiquetée par une lettre, ou
- a exactement deux fils,
- tous ses fils ont pour valeur le même idempotent de S.

Forêts de factorisation

On considère $S = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ et le mot '210232300322002'.

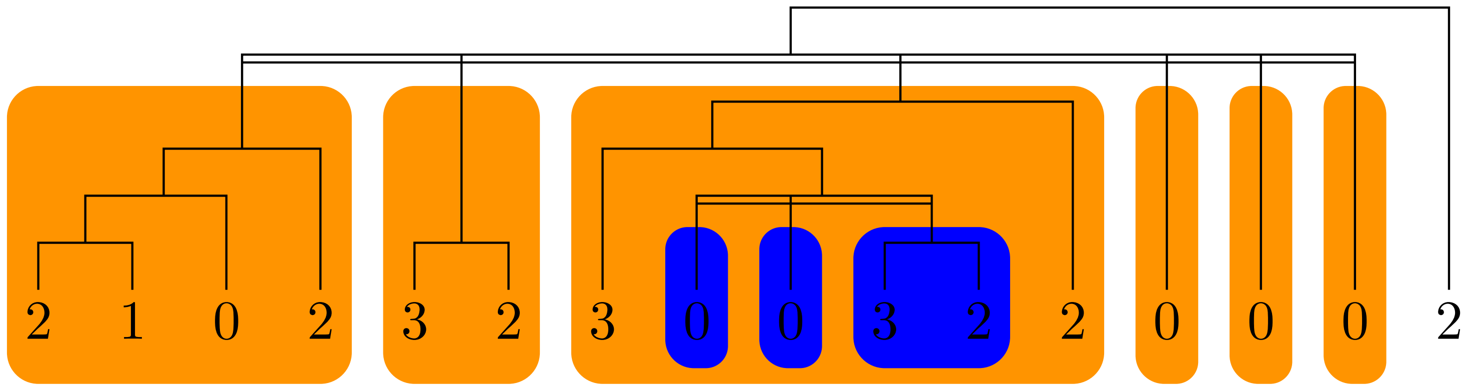


Un arbre est ramseyen si tout nœud

- est une feuille étiquetée par une lettre, ou
- a exactement deux fils,
- tous ses fils ont pour valeur le même idempotent de S.

Forêts de factorisation

On considère $S = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ et le mot '210232300322002'.



Un arbre est ramseyen si tout nœud

- est une feuille étiquetée par une lettre, ou
- a exactement deux fils,
- tous ses fils ont pour valeur le même idempotent de S.

Th(Simon 90, C07): Tout mot sur un semigroupe fini S admet un arbre de factorisation ramseyen de hauteur au plus $3|S|$.

Présentation par expression régulières

Th: Soit S un semigroupe fini et un morphisme de semigroupe $\varphi : A^+ \to S$. Il existe une expression régulière ramseyenne e qui s'évalue en A^*.

Expression régulière Ramseyenne:
L^* autorisé uniquement si $\varphi(L) = \{e\}$ pour $e = e^2 \in S$

Présentation par expression régulières

Th: Soit S un semigroupe fini et un morphisme de semigroupe $\varphi : A^+ \to S$. Il existe une expression régulière ramseyenne e qui s'évalue en A^*.

Expression régulière Ramseyenne:
L^* autorisé uniquement si $\varphi(L) = \{e\}$ pour $e = e^2 \in S$

Exemple: $(S, .) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

$$(0 + 10^*1)^* \quad + \quad 0^*1(0 + 10^*1)^*$$

Présentation par expression régulières

Th: Soit S un semigroupe fini et un morphisme de semigroupe $\varphi : A^+ \to S$.
Il existe une expression régulière ramseyenne e qui s'évalue en A^*.

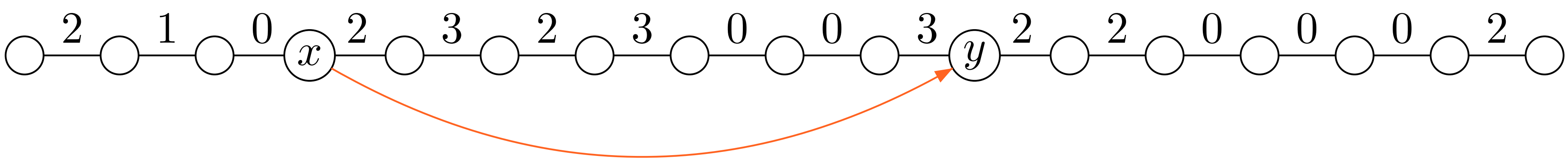
Expression régulière Ramseyenne:
L^* autorisé uniquement si $\varphi(L) = \{e\}$ pour $e = e^2 \in S$

Exemple: $(S, .) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

$$(0 + 10^*1)^* \quad + \quad 0^*1(0 + 10^*1)^*$$

Utilisation: Effectuer une preuve par récurrence sur l'expression régulière.

PRÉSENTATION PAR DÉCOUPAGE



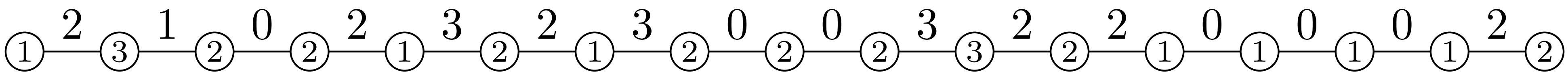
$\sigma(x,y) = 3$

α ordre linéaire (total)
Def: Un étiquetage additif σ est une application de α^2 dans S (semigroupe), $\sigma(x,y)$ défini ssi $x < y$, tq:

$$\forall x < y < z \in \alpha, \qquad \sigma(x,z) = \sigma(x,y).\sigma(y,z)$$

Exemple: u mot de longueur n, $\alpha = ([0,n], <)$, $\sigma(x,y) = \varphi(u_{]x,y]})$.

Présentation par découpage

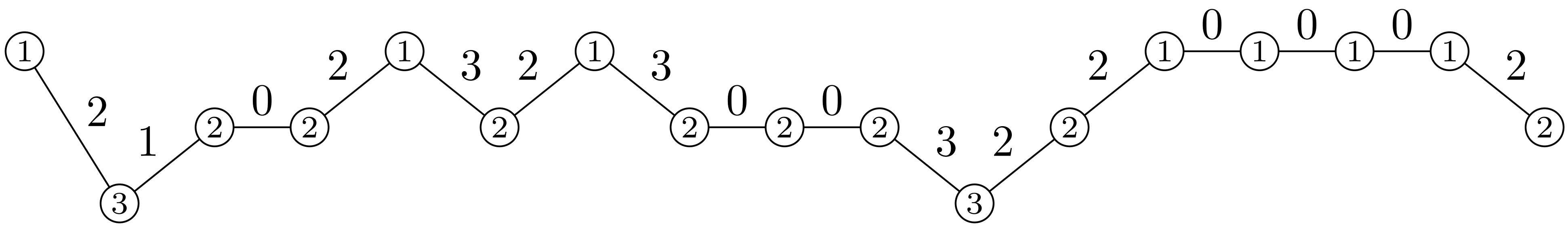


α ordre linéaire (total)
Def: Un étiquetage additif σ est une application de α^2 dans S (semigroupe), $\sigma(x, y)$ défini ssi $x < y$, tq:

$$\forall x < y < z \in \alpha, \qquad \sigma(x, z) = \sigma(x, y).\sigma(y, z)$$

Exemple: u mot de longueur n, $\alpha = ([0, n], <)$, $\sigma(x, y) = \varphi(u_{]x,y]})$.
Def: Un découpage est une application $s : \alpha \to [1, N]$ (N=profondeur).

Présentation par découpage



α ordre linéaire (total)

Def: Un étiquetage additif σ est une application de α^2 dans S (semigroupe), $\sigma(x,y)$ défini ssi $x < y$, tq:

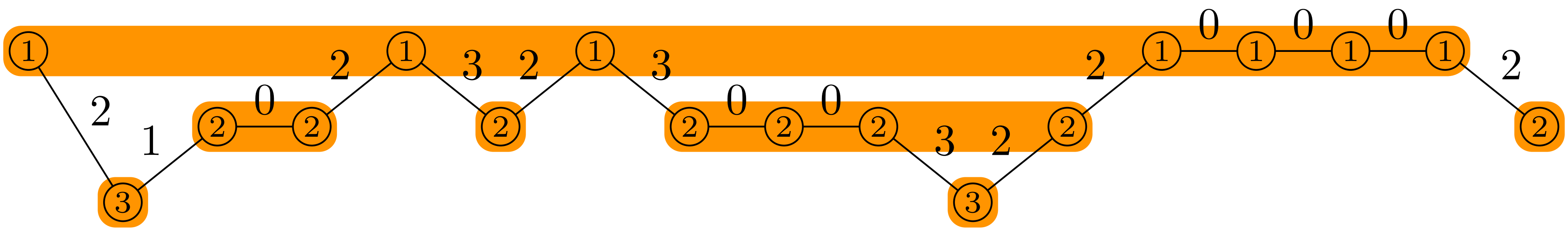
$$\forall x < y < z \in \alpha, \qquad \sigma(x,z) = \sigma(x,y).\sigma(y,z)$$

Exemple: u mot de longueur n, $\alpha = ([0,n],<)$, $\sigma(x,y) = \varphi(u_{]x,y]})$.

Def: Un découpage est une application $s : \alpha \to [1,N]$ (N=profondeur).

Def: $x \sim_s y$ si $s(x) = s(y)$ et pour tout $z \in [\min(x,y), \max(x,y)]$, $s(z) \geq s(x)$.

Présentation par découpage

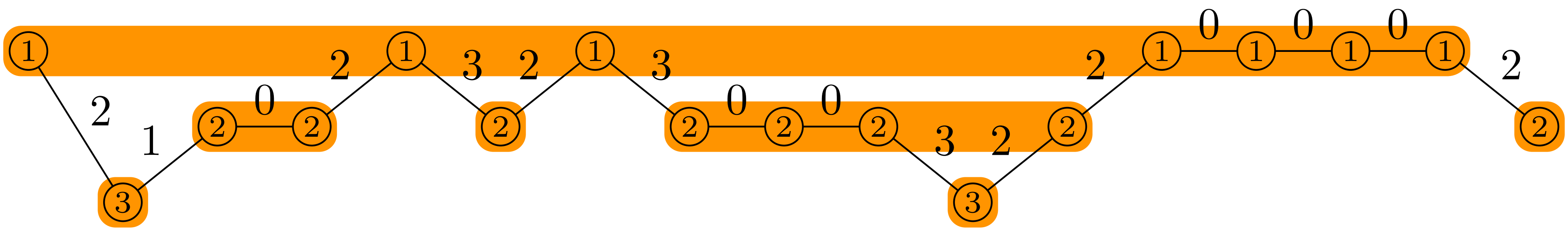


α ordre linéaire (total)
Def: Un étiquetage additif σ est une application de α^2 dans S (semigroupe), $\sigma(x, y)$ défini ssi $x < y$, tq:

$$\forall x < y < z \in \alpha, \qquad \sigma(x, z) = \sigma(x, y).\sigma(y, z)$$

Exemple: u mot de longueur n, $\alpha = ([0, n], <)$, $\sigma(x, y) = \varphi(u_{]x,y]})$.
Def: Un découpage est une application $s : \alpha \to [1, N]$ (N=profondeur).
Def: $x \sim_s y$ si $s(x) = s(y)$ et pour tout $z \in [\min(x, y), \max(x, y)]$, $s(z) \geq s(x)$.
Def: Un découpage s est ramseyen pour σ
$\forall x < y, x' < y'. \quad (x \sim_s y \sim_s x' \sim_s y') \to c(x, y) = c(x, y)^2 = c(x', y')$

Présentation par découpage



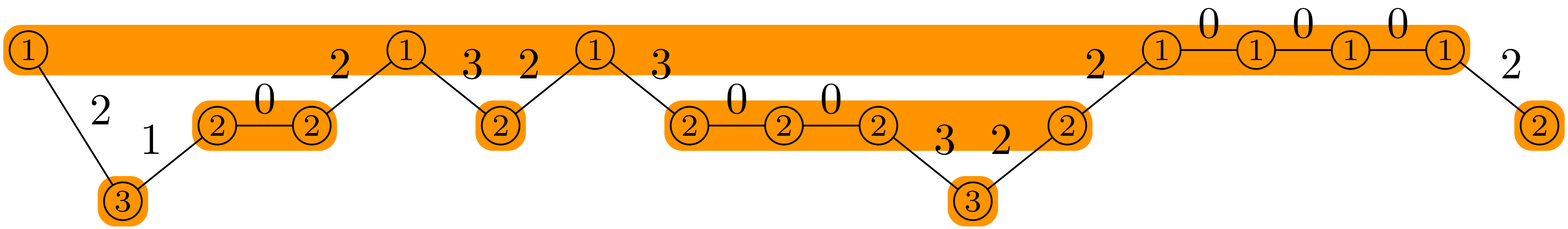
α ordre linéaire (total)
Def: Un étiquetage additif σ est une application de α^2 dans S (semigroupe), $\sigma(x,y)$ défini ssi $x<y$, tq:

$$\forall x < y < z \in \alpha, \qquad \sigma(x,z) = \sigma(x,y).\sigma(y,z)$$

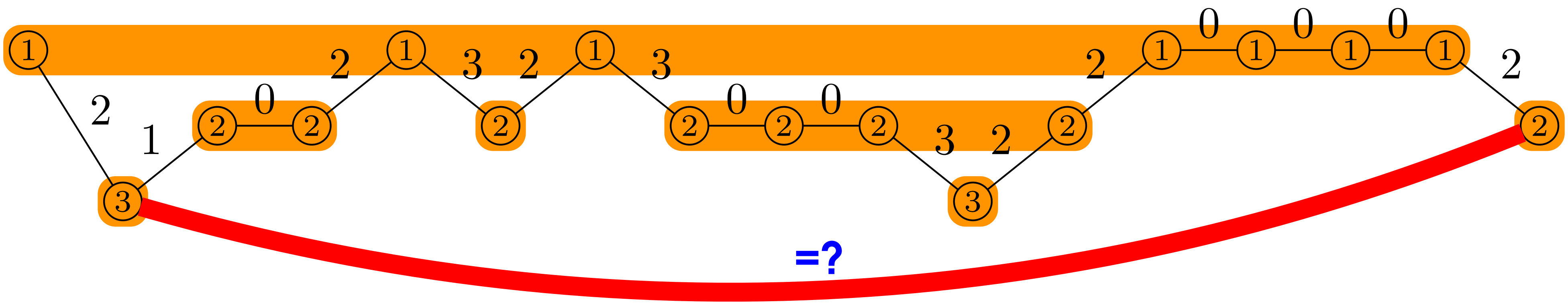
Exemple: u mot de longueur n, $\alpha = ([0,n],<)$, $\sigma(x,y) = \varphi(u_{]x,y]})$.
Def: Un découpage est une application $s : \alpha \to [1,N]$ (N=profondeur).
Def: $x \sim_s y$ si $s(x) = s(y)$ et pour tout $z \in [\min(x,y), \max(x,y)]$, $s(z) \geq s(x)$.
Def: Un découpage s est ramseyen pour σ
$\forall x < y, x' < y'. \quad (x \sim_s y \sim_s x' \sim_s y') \to c(x,y) = c(x,y)^2 = c(x',y')$

Th(C07): Soit α fini, S un semigroupe fini et σ étiquetage additif de α par S. Il existe un découpage s ramseyen pour σ de hauteur $|S|$.

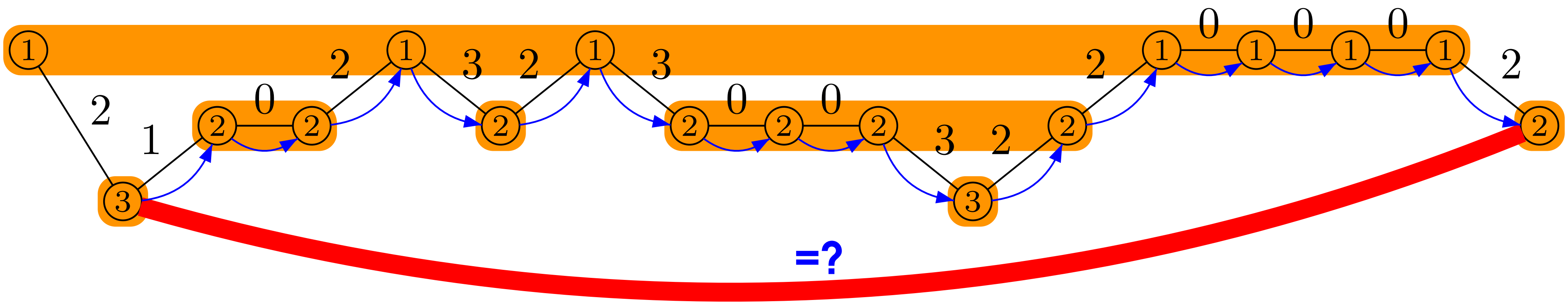
DÉCOUPAGE: STRUCTURE D'ACCELERATION



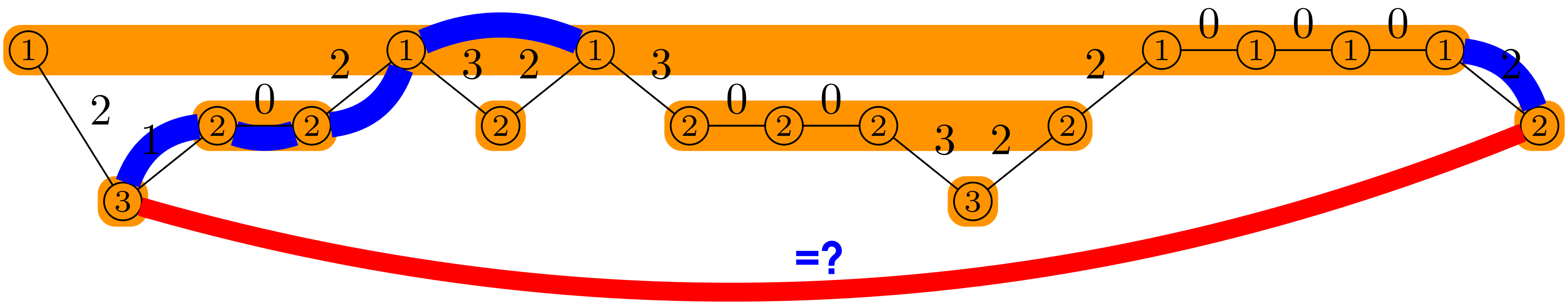
DÉCOUPAGE: STRUCTURE D'ACCELERATION



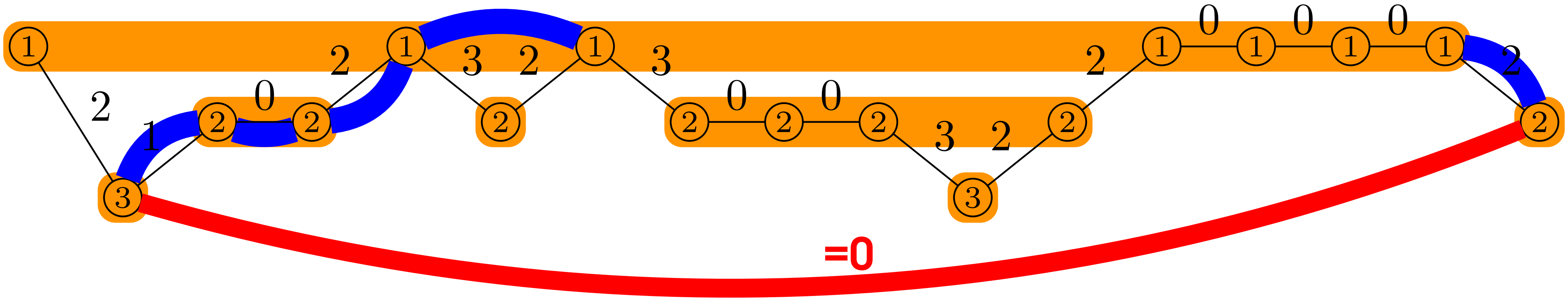
DÉCOUPAGE: STRUCTURE D'ACCELERATION

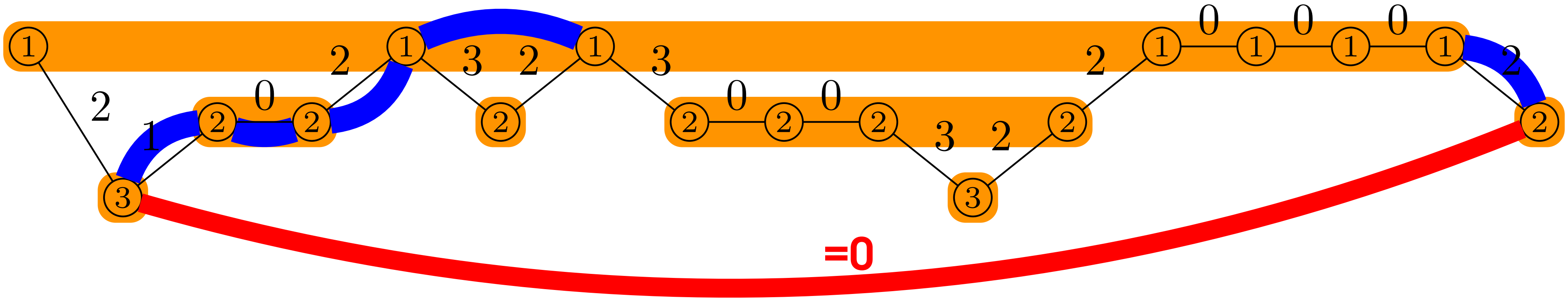


Découpage: structure d'acceleration



DÉCOUPAGE: STRUCTURE D'ACCELERATION





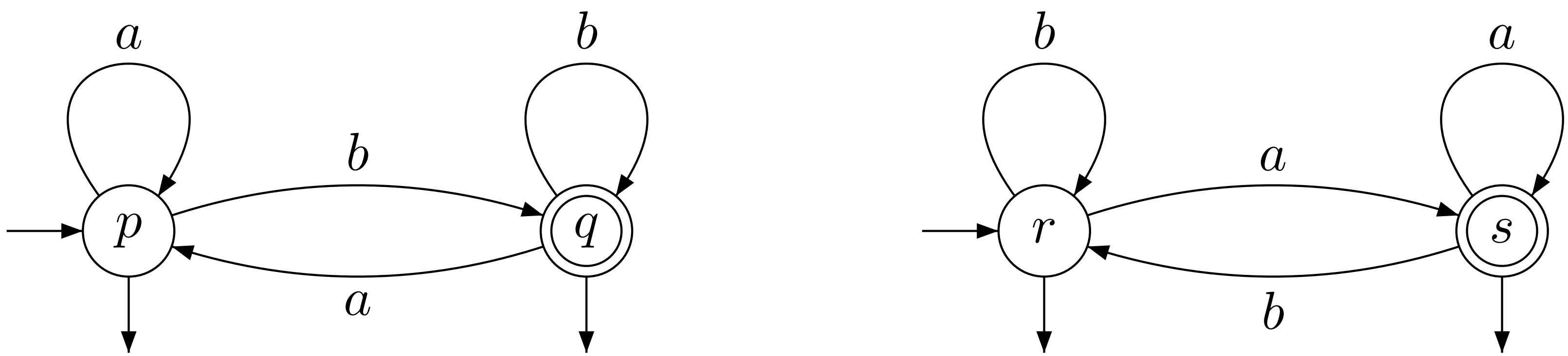
Conclusion: Calculer $\sigma(x, y)$ pour tout x, y est linéaire dans la profondeur du découpage, et indépendant de la longueur du mot.

Automate de distance (min,+)

Automate de distance: automate non-déterministe $\mathcal{A}$, dont on identifié un ensemble d'états E.

Sémantique: $|\rho|_E$ = nombre de fois qu'un état de E est vu dans ρ.
Pour tout mot u, $\mathcal{A}(u)$ est le minimum de $|\rho|_E$ pour ρ exécution sur u.

Exemple: $\mathcal{A}(u) = \min(|u|_a, |u|_b)$



Problème (limitedness): Étant donné un automate de distance $\mathcal{A}$, est-ce que la fonction $\mathcal{A} : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ est bornée?

Th (Hashigushi, Simon, Leung): Le problème de 'limitedness' est décidable.

Utilisation: Déterminer la hauteur d'étoile d'un langage régulier (Hashigushi, Kirsten).

Variante infinie

Def: Un ordre linéaire est complet si toute partie majorée a une borne sup et toute partie minorée a une borne inf.

Th(C07): Soit α ordre linéaire complet, S un semigroupe fini et σ étiquetage additif de α par S.
Il existe un découpage s ramseyen pour σ de hauteur $3|S|$.

VARIANTE INFINIE

Def: Un ordre linéaire est complet si toute partie majorée a une borne sup et toute partie minorée a une borne inf.

Th(C07): Soit α ordre linéaire complet, S un semigroupe fini et σ étiquetage additif de α par S.
Il existe un découpage s ramseyen pour σ de hauteur $3|S|$.

Application: Complémentation des automates sur les ordres linéaires dispersés dénombrables **(Carton&Rispal)**.

Variante déterministe

Question: Est-il possible de calculer la factorisation de manière déterministe (en lisant le mot de la gauche vers la droite) ?

Réponse: Impossible!

VARIANTE DÉTERMINISTE

Question: Est-il possible de calculer la factorisation de manière déterministe (en lisant le mot de la gauche vers la droite) ?
Réponse: Impossible!

Solution: Utiliser une factorisation 'ramseyenne avant':
$\forall x < y, x' < y'. \quad (x \sim_s y \sim_s x' \sim_s y') \rightarrow \sigma(x, y).\sigma(x', y') = c(x, y)$.

Th(C07): Soit α fini, S un semigroupe fini et σ étiquetage additif de α par S. Il existe un découpage s ramseyen avant pour σ de hauteur $|S|$ tel que

- $s(x)$ ne dépend que de $\sigma|_{\leq x}$,
- $s(x)$ est calculable par automate fini.

Variante déterministe

Question: Est-il possible de calculer la factorisation de manière déterministe (en lisant le mot de la gauche vers la droite) ?
Réponse: Impossible!

Solution: Utiliser une factorisation 'ramseyenne avant':
$\forall x < y, x' < y'. \quad (x \sim_s y \sim_s x' \sim_s y') \rightarrow \sigma(x,y).\sigma(x',y') = c(x,y)$.

Th(C07): Soit α fini, S un semigroupe fini et σ étiquetage additif de α par S. Il existe un découpage s ramseyen avant pour σ de hauteur $|S|$ tel que

- $s(x)$ ne dépend que de $\sigma|_{\leq x}$,
- $s(x)$ est calculable par automate fini.

Application1: Déterminisation des automates de Büchi en automates à parité (McNaughton 66).

VARIANTE DÉTERMINISTE

Question: Est-il possible de calculer la factorisation de manière déterministe (en lisant le mot de la gauche vers la droite) ?
Réponse: Impossible!

Solution: Utiliser une factorisation 'ramseyenne avant':
$\forall x < y, x' < y'. \quad (x \sim_s y \sim_s x' \sim_s y') \to \sigma(x,y).\sigma(x',y') = c(x,y)$.

Th(C07): Soit α fini, S un semigroupe fini et σ étiquetage additif de α par S.
Il existe un découpage s ramseyen avant pour σ de hauteur $|S|$ tel que

- $s(x)$ ne dépend que de $\sigma|_{\leq x}$,
- $s(x)$ est calculable par automate fini.

Application1: Déterminisation des automates de Büchi en automates à parité (McNaughton 66).

Application2 (Accélération sur les arbres):
Toute expressions MSO $\Phi(x_1, \ldots, x_N)$ est équivalente à une expression FO $\phi(x_1, \ldots, x_N)$ qui utilise des formules MSO unaires $\Psi(x)$.

VARIANTE DÉTERMINISTE

Question: Est-il possible de calculer la factorisation de manière déterministe (en lisant le mot de la gauche vers la droite) ?
Réponse: Impossible!

Solution: Utiliser une factorisation 'ramseyenne avant':
$\forall x < y, x' < y'. \quad (x \sim_s y \sim_s x' \sim_s y') \rightarrow \sigma(x,y).\sigma(x',y') = c(x,y)$.

Th(C07): Soit α fini, S un semigroupe fini et σ étiquetage additif de α par S. Il existe un découpage s ramseyen avant pour σ de hauteur $|S|$ tel que

- $s(x)$ ne dépend que de $\sigma|_{\leq x}$,
- $s(x)$ est calculable par automate fini.

Application1: Déterminisation des automates de Büchi en automates à parité (McNaughton 66).

Application2 (Accélération sur les arbres):
Toute expressions MSO $\Phi(x_1, \ldots, x_N)$ est équivalente à une expression FO $\phi(x_1, \ldots, x_N)$ qui utilise des formules MSO unaires $\Psi(x)$.

Application3: Une structure est MSO-interprétable dans un arbre ssi elle est FO-interprétable dans un arbre.

Théorème de Ramsey infini:
Complémentation des automates sur les mots de longueur ω.

RÉCAPITULATIF

Théorème de Ramsey infini:
Complémentation des automates sur les mots de longueur ω.

Théorème de forêts de factorisation:
Technique d'accélération
Automates de distance
+ Caractérisation de logiques
+ Complémentation des langage ωBS

RÉCAPITULATIF

Théorème de Ramsey infini:
Complémentation des automates sur les mots de longueur ω.

Théorème de forêts de factorisation:
Technique d'accélération
Automates de distance
+ Caractérisation de logiques
+ Complémentation des langage ωBS

Variante pour ordres linéaires infinis:
Complémentation des ordres infinis dispersés
+ Théorie des boréliens de $\mathbb{R}$ (en cours).

RÉCAPITULATIF

Théorème de Ramsey infini:
Complémentation des automates sur les mots de longueur ω.

Théorème de forêts de factorisation:
Technique d'accélération
Automates de distance
+ Caractérisation de logiques
+ Complémentation des langage ωBS

Variante pour ordres linéaires infinis:
Complémentation des ordres infinis dispersés
+ Théorie des boréliens de $\mathbb{R}$ (en cours).

Variante déterministe:
Déterminisation de McNaughton
"Équivalence" MSO/FO sur les arbres.
+ ...