MPRI, Aspects Algorithmiques de la Combinatoire

Epreuve proposée par Dominique Rossin et Robert Cori

22 Novembre 2007, durée 2 heures 30

Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Les calculatrices sont interdites. *On écrira les algorithmes demandés en utilisant un des langages de programmation de votre choix.*

---

1 Permutations connexes

Une permutation $\alpha = a_1, a_2, \ldots, a_n$ est connexe si pour tout $p < n$, il existe $j \leq p$ tel que $a_j > p$. De manière intuitive cela signifie qu'il n'existe pas de facteur gauche strict de α qui soit une permutation de $1, 2, \ldots, p$. Ainsi il y a trois permutations connexes pour $n = 3$ qui sont

$$2,3,1 \quad 3,1,2 \quad 3,2,1$$

Leurs représentations sous forme de cycles sont respectivement

$$(1,2,3) \quad (1,3,2) \quad (1,3)(2)$$

Question 1. Montrer que toute permutation circulaire est connexe. Pour $n = 4$, donner les 7 permutations connexes qui ne sont pas des permutations circulaires, vous écrirez ces permutations sous forme de produits de cycles.

Question 2. Proposer un algorithme (de préférence en $O(n)$) qui vérifie si une permutation α donnée sous forme d'un tableau $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est connexe.

Dans la suite on note c_n le nombre de permutations connexes sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Les premières valeurs de c_n sont ainsi $1, 1, 3, 13$

Question 3. Démontrer que

$$n! \; - \; c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (n-i)!$$

en montrant que toute permutation qui n'est pas connexe se décompose en deux permutations satisfaisant certaines conditions. Déduire de ce résultat une expression de la série génératrice $C(x) = \sum_{i \geq 1} c_i x^i$ des permutations connexes en fonction de celle $I(x) = \sum_{i \geq 0} i! x^i$ des permutations quelconques.

Question 4. On considère la technique suivante de construction des permutations connexes sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ à partir de permutations quelconques sur $\{1, 2, \ldots, n-1\}$:

Soit $\beta = a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ une permutation quelconque on insère n dans cette permutation obtenant

$$\alpha = a_1, a_2, \ldots a_i, n, a_{i+1} \ldots a_{n-1}$$

Toutes les façons d'insérer ne donnent pas une permutation connexe toutefois on peut toujours insérer n au début et jamais à la fin. On dit qu'une permutation β est k-insérable s'il existe exactement k façons d'insérer n dans β en obtenant une permutation connexe.

Quel est le nombre de permutations sur $1, 2, \ldots, n$ qui sont 1-inserables? et de celles qui sont $(n-1)$-insérables?

Question 5. En utilisant la technique proposée à la Question **4** montrer que

$$c_n = \sum_{i=1}^{n-1} i c_i (n-i-1)!$$

On considère dans la suite la permutation circulaire $\sigma_n = (1, 2, \ldots, n)$ et pour une permutation connexe α l'hypercarte $H(\alpha) = (\sigma_n, \alpha)$ ayant un seul sommet.

Question 6. Donner parmi les 7 permutations α que vous avez calculées à la Question **1**, les 4 qui sont telles que $H(\alpha)$ soit planaire. Il y a ainsi 5 permutations connexes sur $1, 2, 3, 4$ qui forment avec $(1, 2, 3, 4)$ une hypercarte planaire car parmi les 6 permutations circulaires il n'y a que $(1, 2, 3, 4)$ qui possède cette propriété.

Question 7. Montrer que si α est connexe sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ et si $H(\alpha)$ est planaire alors 1 et n sont dans un même cycle de α. En déduire une bijection entre les permutations β de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ telles que (σ_{n-1}, β) est planaire et les permutations connexes α sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ telles que $H(\alpha)$ est planaire.

2 Cartes et polynôme de Tutte

Ce problème traite du polynôme de Tutte et des cartes. En effet, nous avons vu que le polynôme de Tutte avait de multiples définitions, dont une dépendant des activités des arbres couvrants du graphe étudié. Or la définition de l'activité d'une arête (interne ou externe à un arbre) est relative à une numérotation prédéfinie des arêtes du graphe. Olivier Bernardi en 2006 a montré que l'on pouvait définir une nouvelle notion d'activité pour les arêtes d'un graphe selon un arbre couvrant donné mais qui dépend uniquement d'un plongement du graphe sur une surface, c'est à dire d'une carte combinatoire.

On rappelle qu'une carte combinatoire est la donnée d'un ensemble de demi-arêtes ou brins B et d'une permutation σ ainsi qu'une involution sans point fixe τ tel que $< \sigma, \tau >$ soit transitif sur B.

Pour définir le polynôme de Tutte, deux opérations sur les graphes (en fait sur les cartes pour cet exercice) sont nécessaires, la suppression d'une arête (et donc de deux brins b, b' tels que $b = \tau(b')$ et la contraction de ces 2 brins.

Pour la suppression, on veut ne pas changer l'action de τ sur $B - \{b, b'\}$ ni l'ordre des brins restants dans les orbites de σ.

Pour la contraction, on veut de même ne pas changer l'action de τ sur $B - \{b, b'\}$ et veut de plus garder un certains ordre sur les brins autour d'un sommet comme le montre la figure 1.

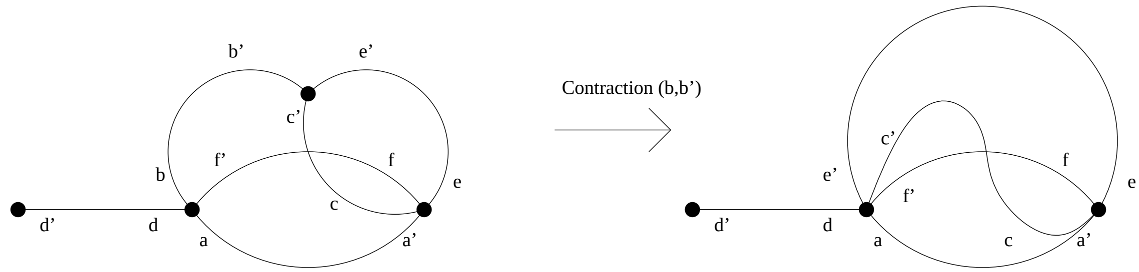

Figure 1: Contraction

Question 8. Soit $M = (B, \sigma, \tau)$ une carte combinatoire et $B = \{1, \ldots, 2m\}$ l'ensemble des brins. Sans perte de généralités, on pourra supposer que $1 = \tau(2)$ et $M' = (B', \sigma', \tau')$ la carte obtenue après contraction de l'arête $(1, 2)$ et $M'' = (B', \sigma'', \tau'')$ après suppression de cette arête. Définir de manière rigoureuse les opérations en donnant B', σ', τ', σ'' et τ'' en fonction de B, σ, τ.

Soit une carte et un arbre couvrant T de la carte, on construit un ordre total sur les brins grâce à l'algorithme suivant :

- brin = 1;
- Faire
  - Si le brin est dans T faire $brin = \sigma(\tau(brin))$
  - Sinon faire $brin = \sigma(brin)$
- Tant que $brin \neq 1$

Question 9. Montrez que l'algorithme précédent termine

Question 10. Montrez que l'algorithme précédent parcourt l'ensemble des brins de B.

Comme cet algorithme parcourt l'ensemble des brins il définit donc un ordre linéaire sur B qui est $i < j$ si i apparaît avant j dans l'algorithme précédent. On peut en déduire un ordre sur les arêtes de la manière suivante. Si $e = \{h_1, h_2\}$ et $e' = \{h'_1, h'_2\}$ sont deux arêtes alors $e < e'$ si et seulement si $min(h_1, h_2) < min(h'_1, h'_2)$ pour l'ordre sur les brins défini précédement. On dit maintenant qu'une arête est interne (resp. externe) active si elle appartient (resp. n'appartient pas) à l'arbre couvrant et est minimale dans son cocyle (resp. cycle) toujours en fonction de l'ordre que l'on vient de définir et non d'une numérotation des arêtes comme en cours.

Question 11. Montrez alors que le polynôme de Tutte peut être défini par:

$$T_G(x, y) = \sum_{T \text{ arbre couvrant}} x^{I(T)} y^{E(T)}$$

où $I(T)$ est le nombre d'arêtes internes actives de l'arbre et $E(T)$ le nombre d'arêtes du externes actives du graphe selon la définition précédente. On pourra s'aider de la carte où une arête a été contracté et de celle où on a supprimé une arête.

3 Permutations séparables et chemins de Schröder

Une permutation séparable est une permutation ne contenant pas comme motif les permutations 2413 et 3142. (On entend comme motif toute sous-séquence isomorphe en ordre. Par exemple 231 est motif de 3142 car est isomorphe en ordre à 342.)

Question 12. Combien existe-t-il de permutations séparables de taille $1, 2, 3, 4$?

On dit qu'une permutation $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ d'un intervalle $I = [i, i+1, \dots, i+n-1]$ est *scindable* si il existe k tel qu'on puisse écrire $\sigma = \sigma'\sigma''$ où σ' est de taille k et σ', σ'' sont des permutations d'un intervalle.

On dit maintenant qu'une permutation σ est totalement scindable si on peut récursivement scinder σ jusqu'à obtenir des singletons. Par exemple, 34125 est totalement scindable car on peut successivement la décomposer en 3412 et 5 puis 3412 peut être scindé en 34 et 12 et enfin on obtient tous les singletons.

Question 13. Combien existe-t-il de permutations totalement scindables de taille $1, 2, 3, 4$?

Question 14. En remarquant que l'opération de scindage de σ en σ' et σ'' peut se faire de deux manières selon que les éléments de σ' sont inférieurs ou supérieurs aux éléments de σ'' montrer que l'on peut représenter une permutation totalement scindable par un arbre binaire plan qui possède n feuilles et dont les noeuds internes sont étiquetés par $+$ ou $-$ selon le type de scindage.

Question 15. Montrez par un exemple que ce codage n'est pas bijectif.

Question 16. Montrer maintenant que les permutations totalement scindables sont exactement les permutations séparables.

Question 17. Donner une bijection entre les arbres planaires à n feuilles où la racine est étiquetée par $+$ ou $-$ et où les sommets internes ont au moins 2 fils et les permutations séparables sur $1, 2 \dots n$.

Un chemin de Schröder de taille n est un chemin partant de $(0, 0)$ et allant en $(2n, 0)$ restant au dessus (au sens large) de l'axe des abscisses et possédant des pas $(1, 1)$, $(1, -1)$ et $(2, 0)$.

Question 18. Combien existe-t-il de chemins de Schröder de taille $2, 4, 6$?

Question 19. Trouver une bijection établissant un lien entre les chemins de Schröder et les permutations séparables.