Permutations

<u>Def</u> Une permutation est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\} = [n]$

Il existe différentes façons de représenter une permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & & & \sigma(6) \end{pmatrix}$$

ou $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(6))$
$= \sigma(1) \dots \sigma(n)$

<u>Exemple</u> $n=5$ $\sigma = 31254$

Il existe $n!$ permutations de $[n]$

avec $\begin{cases} n! = n \cdot (n-1)! & n \geq 1 \\ \text{et } 0! = 1 \end{cases}$

<u>$n=3$</u> 312 321 132 231
213 123

Inversions

(σ_i, σ_j) est une inversion de σ si $\sigma_i > \sigma_j$ et $i < j$

On note $Inv(\sigma)$ l'ensemble des inversions de σ

$$Inv(\sigma) = \{(\sigma_i, \sigma_j), \sigma_i > \sigma_j \text{ et } i < j\}$$

Le nombre d'inversions est égal au nombre de transpositions dont on a besoin pour transformer σ en l'identité

Table d'inversion

$$T_\sigma(i) = |\{j \mid (j,i) \in Inv(\sigma)\}|$$

ex $\sigma = 6\ 3\ 7\ 5\ 2\ 4\ 8\ 1\ 9$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_\sigma(i)$	7	4	1	3	2	0	0	0	0

Exercice ① Montrer que $T_\sigma(i)$ est tel que $0 \leq T_\sigma(i) \leq n-i$

② Combien d'inversions peut avoir une permutation ?

③ Montrer que σ et σ^{-1} ont le même nombre d'inversions.

Proposition

Il existe une bijection entre les permutations σ de $\{1, \dots, n\}$ et les tables d'inversions

$$T = (T(1), \dots, T(n))$$

avec $0 \leq T(i) \leq n-i$.

telle que $|Inv(\sigma)| = \sum_{i=1}^{n} T(i)$

Preuve Algorithme constructif

$$T \longrightarrow \sigma$$

Pour i allant de 0 à $n-1$

insérer $n-i$ en position $T(n-i)+1$.

Exemple

$T = (1, 5, 2, 2, 4, 2, 0, 1, 0)$

$$9 \to 98 \to 789 \to 7869$$
$$\to 78695 \to 784695$$
$$\to 7834695 \to 78346295$$
$$\to 718346295$$

$$\sigma = 718346295$$

$T = (7, 4, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 0)$

$$9 \to 89 \to 789 \to 6789 \to 67589$$
$$\to 675489 \to 6375489$$
$$\to 63752489 \to 637524819$$

$$\sigma = 637524819$$

Par conséquent

$$I_n(q) = \sum_{\sigma \in S_n} q^{|\mathrm{Inv}(\sigma)|}$$

Bijection

$$= \sum_{T} q^{\sum T(i)}$$

$$= \sum_{T(1)=0}^{n-1} \cdots \sum_{T(n)=0}^{0} q^{T(1)+\cdots+T(n)}$$

$$= \left(\sum_{T(1)=0}^{n-1} q^{T(1)}\right) \cdots \left(\sum_{T(n-1)=0}^{1} q^{T(n-1)}\right)\left(\sum_{T(n)=0}^{0} q^{T(n)}\right)$$

$$= (1+q+\cdots+q^{n-1}) \cdots (1+q)$$

Exercice Montrer que $I_n(q) = \prod_{i=1}^{n-1} (1+\dots+q^i)$ par récurrence

Solution

Etant donnée σ permutation de $[n-1]$, on peut créer n permutations π

$$\pi = (\sigma(1) \dots \sigma(i-1)\ n\ \sigma(i) \dots \sigma(n-1))$$

Ces permutations sont telles que

$$|Inv(\pi)| = |Inv(\sigma)| + n-i$$

Donc S_n ensemble des permutations de $[n]$

$$\underbrace{\sum_{\pi \in S_n} q^{|Inv(\pi)|}}_{I_n(q)} = \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S_{n-1}} q^{inv(\sigma)}\right)}_{I_{n-1}(q)} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} q^{n-i}\right)}_{(1+q+\dots+q^{n-1})}$$

Exercice

① Montrer que pour toute permutation on peut calculer la table d'inversion en $O(n^2)$ opérations.

② Montrer qu'étant donnée une table d'inversion, on peut retrouver la permutation en $O(n^2)$ opérations

Nous allons donner deux preuves du résultat

Théorème Le nombre moyens d'inversions I_n d'une permutation est $\frac{n(n-1)}{4}$

Preuve 1

Soit $I_{n,k}$ le nombre de permutations de $[n]$ avec k inversions

Le nombre moyen d'inversions

est $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \cdot I_{n,k}$.

Comme $I_n(q) = \sum_{k=0}^{n} I_{n,k}\, q^k$

Le nombre moyen d'inversions I_n est

donc $= I_n'(1)/n!$

|

On a

$$I_n(q) = 1 \cdot (1+q) \cdots (1+q+\dots+q^{n-1})$$

Donc

$$I_n'(1) = I_n(1) \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{i}{2}}{i}$$

$$= \frac{I_n(1)}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= \underbrace{I_n(1)}_{n!} \cdot \frac{n(n-1)}{4}$$

Autre preuve

$$I_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} |\mathrm{Inv}(\sigma)|$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} |\mathrm{Inv}(\hat{\sigma})|$$

$$\hat{\sigma} = (\sigma(n), \sigma(n-1), \dots, \sigma(2), \sigma(1))$$

$$\overline{I}_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{|\mathrm{Inv}(\sigma)| + |\mathrm{Inv}(\hat{\sigma})|}{2}$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{4}$$

car pour toute permutation σ

$$|\mathrm{Inv}(\sigma)| + |\mathrm{Inv}(\overline{\sigma})| = \binom{n}{2}$$

Algorithmes de tri

$a = (a[0], \dots, a[n-1])$

Tri par sélection

Pour i allant de 0 à $n-2$
  Pour j allant de $i+1$ à $n-1$
    Si $a[i] > a[j]$
      alors échanger$(a[i], a[j])$

Tri par insertion

Pour i allant de 0 à $n-1$
  $j \leftarrow i$
  Si $j \neq 0$ et $a[j] < a[j-1]$
  | Echanger$(a[i], a[j])$
  | $j \leftarrow j-1$

Exercice : Calculer le nb. moyen d'échanges dans les algo. de tri précédents.

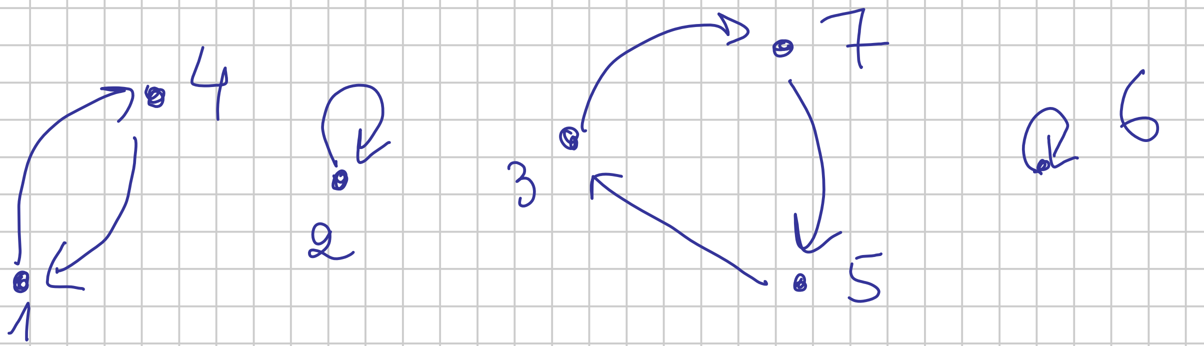
Cycles

Permutation

$$\sigma = 4\,2\,7\,1\,3\,6\,5$$

Notation cyclique

graphe avec un arc $i \longrightarrow \sigma(i)$



$$\sigma = (1\,4)\,(2)\,(3\,7\,5)\,(6)$$
$$= (2)\,(4\,1)\,(6)\,(7\,5\,3)$$

on ordonne les cycles tels que le maximum est en premier et les cycles sont triés par ordre croissant des maximums

Bijection fondamentale

$$\sigma \longmapsto \hat{\sigma}$$

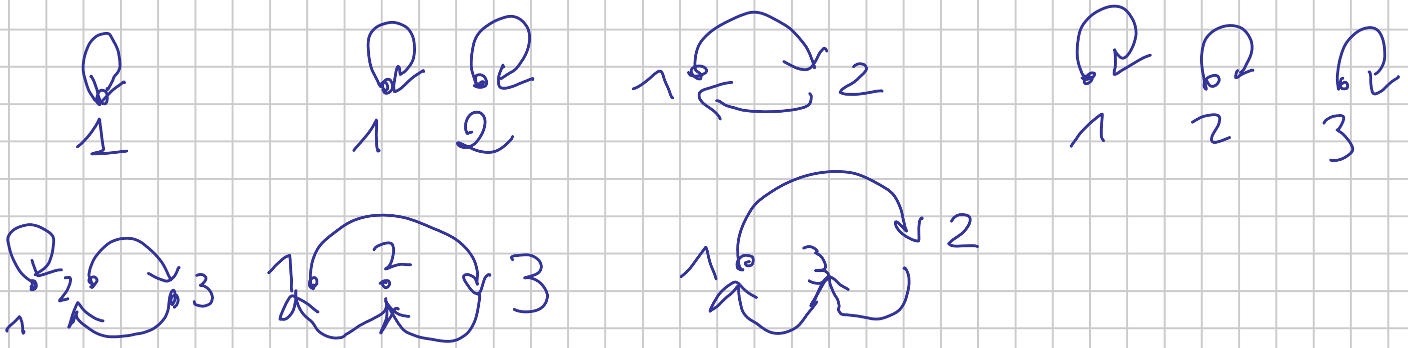
on oublie les parenthèses

$\sigma = 427\,1365$ $\qquad$ $\hat{\sigma} = 241\,6753$

Bijection de $S_n \longrightarrow S_n$ telle σ a k cycles ssi $\hat{\sigma}$ a k maxima de gauche à droite.

Exercice Donner un algorithme qui calcule le nb de maxima de gauche à droite.

Soit $C(n,k)$ le nombre de permutations de $[n]$ avec k cycles.



$C(1,1) = C(2,2) = C(3,3) = 1$

$C(2,1) = 1 \qquad C(3,1) = 2 \qquad C(3,2) = 3$

Proposition

$$C(0,0) = 1$$

$$C(n,k) = 0 \text{ si } n = 0 \text{ ou } k = 0$$

$$C(n,k) = (n-1)\, C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$$

Preuve Exercice

Soit $F_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) t^k$

Proposition

$$F_n(t) = t(t+1)\dots(t+n-1)$$

Preuve

$F_n(t) = t(t+1)\dots(t+n-1)$

$$F_n(t) = (t + (n-1))\, F_{n-1}(t)$$

Prendre le coefficient de t^k

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\, C(n-1,k)$$

2eme preuve

Pour montrer que deux polynômes sont égaux, il suffit de montrer qu'ils sont égaux en un certain nombre de valeurs.

Soit $t \in \mathbb{P}$ et $C(\sigma)$ l'ensemble des cycles de σ

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, t^k}_{\substack{\text{compte les paires } (\sigma, f) \text{ avec } \sigma \in S_n \\ \text{et } f : C(\sigma) \longrightarrow [t]}} = \underbrace{t \cdot (t+1) \dots (t+n-1)}_{\substack{\text{compte les suites } (a_1, \dots, a_n) \\ \text{avec } 0 \leq a_i \leq t+n-i-1}}$$

Bijection

$$(a_1, \dots, a_n) \longrightarrow (\sigma, f)$$

Pour i allant de 0 à $n-1$

- $0 \leq a_{n-i} \leq t-1$, on crée un nouveau cycle C_j avec l'élément $n-i$ et $f(C_j) = a_{n-i}+1$

- $a_{n-i} = t+k \qquad 0 \leq k \leq i-1$
on insère $n-i$ en position $k+1$.

exemple $\quad t=4$

$$(a_1, \dots, a_9) = (4, 8, 5, 0, 7, 5, 2, 4, 1)$$

$i=0$	(9)	$f(9)=2$
1	(98)	
2	$(7)(98)$	$f(7)=3$
3	$(7)(968)$	
4	$(7)(9685)$	
5	$(4)(7)(9685)$	$f(4)=1$
6	$(4)(73)(9685)$	
7	$(4)(73)(96285)$	
8	$(41)(73)(96285)$	

Exercice $\left| \begin{array}{l} t=3 \\ a = (6,1,3,0,3,2) \end{array} \right.$

Solution $(2)\,(4\,3)\,(6\,1\,5)$

$f(2)=2 \quad f(4)=1 \quad f(6)=3$

Si on pose $t=1$, on obtient 2 corollaires

Corollaire Le nombre de suite $(a_1,\dots,a_n)$ avec k valeurs égal à 0 et $0 \le a_i \le n-i$ est $C(n,k)$

Corollaire Le nombre de permutation de n avec k minimaux de gauche à droite est $c(n,k)$.

Exercice Montrer que le nombre moyen de cycle est $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Solution

$$H_n = \frac{1}{n!} F_n'(1)$$

$$= \frac{1}{n!} F_n(1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Descentes et excédances

$\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$

$\sigma(i)$ est une descente si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$

$\sigma(i)$ est une excédance | faible si $\sigma(i) \geq i$
| stricte | $\sigma(i) > i$

	# descentes	# excédance faible	# excédance strictes
123			
132			
213			
231			
312			
321			

$D_{n,k}$: nombre de perm. de $[n]$ avec k descentes

$E_{n,k}$: nombre de perm. de $[n]$ avec k excédances faibles.

$F_{n,k}$: ——— strictes