

DEVOIR A LA MAISON (FACULTATIF)

COMBINATOIRE - SYLVIE CORTEEL

Notation: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. On suppose que $0! = 1$.

1. Donner des preuves combinatoires des identités suivantes :

- (1) $\sum_{k=0}^n \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$.
- (2) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$
- (3) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0, n \geq 1$
- (4) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{2n-j}{n} (x-1)^j$.

2. Soit $f(n,r,s)$ le nombre de sous-ensembles S de $[2n]$ avec r entiers impairs et s entiers pairs et tels qu'ils ne contiennent pas d'entiers consécutifs. Montrer bijectivement que $f(n,r,s) = \binom{n-r}{s} \binom{n-s}{r}$. Par exemple, si $n = 4, r = 2$ et $s = 1$, on obtient les sous-ensembles $\{1, 3, 6\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 5, 8\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 8\}$.

3. Montrer que parmi toutes les compositions de n , la part k apparaît un nombre total de $(n-k+3)2^{n-k-2}$ fois. Par exemple, si $n = 4$ et $k = 2$, les compositions où 2 apparaît sont $(1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 2)$. Donc 2 apparaît 5 fois au total.

4. Soit une suite (c_1, c_2, \dots, c_n) d'entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^n ic_i = n$. Montrer que le nombre de permutations de $[n]$ avec c_i cycles de longueur i est

$$\frac{n!}{1^{c_1} c_1! 2^{c_2} c_2! \dots n^{c_n}}$$

5. Soient π et σ deux permutations de $[n]$. Montrer que $\pi\sigma$ et $\sigma\pi$ ont le même nombre de points fixes.

6. Soit $L(n, k)$ le nombre de permutations de $[n]$ dont le plus grand cycle est de taille k .

- (1) Trouver une formule pour $n/2 < k \leq n$.
- (2) Trouver une formule pour $n/3 < k \leq n/2$.
- (3) Trouver une formule pour $1 \leq k \leq n$.

Date: A rendre le 21 Octobre.

7. Soit $p_k(n)$ le nombre de partitions de n en k parts. Montrer bijectivement que :

$$p_k(n+k) = \sum_{i=0}^k p_i(n).$$

8. Soit $f(n)$ le nombre de partitions de n où toute part k apparaît au plus k fois pour tout $k \geq 1$. Soit $g(n)$ le nombre de partitions de n qui n'ont pas de parts égales à $i(i+1)$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que $f(n) = g(n)$ pour tout $n \geq 1$.

9. Trouver la série génératrice des partitions auto-conjuguées en parts paires.