

Algorithmique Avancée - TD 3 - 25 octobre 2011

Université Paris 7 — BioInformatique — M1

1 Bellman-Ford

Voilà l'algorithme de Bellman-Ford calculant un arbre de plus court chemin (stocké dans le tableau `pere`) et les distances tout tout sommet x à r (stockées dans le tableau `d`).

```
pour tout  $x \neq r$  faire
└─  $d[x] = +\infty$ 
 $d[r] = 0$ 
pour  $i$  de 1 à  $n$  faire
└─ pour tout arc  $(x, y) \in E$  faire
└─└─ NB : ceci est relax(x,y)
└─└─ si  $d[x] + l(x, y) < d[y]$  alors
└─└─└─  $d[y] = d[x] + l(x, y)$ 
└─└─└─  $pere[y] = x$ 
```

Exercice 1 Appliquer cet algorithme au graphe page suivante (pour les plus courts chemins depuis 0).

Exercice 2 Montrer que cet algorithme calcule des plus courts chemins. En quel temps ?

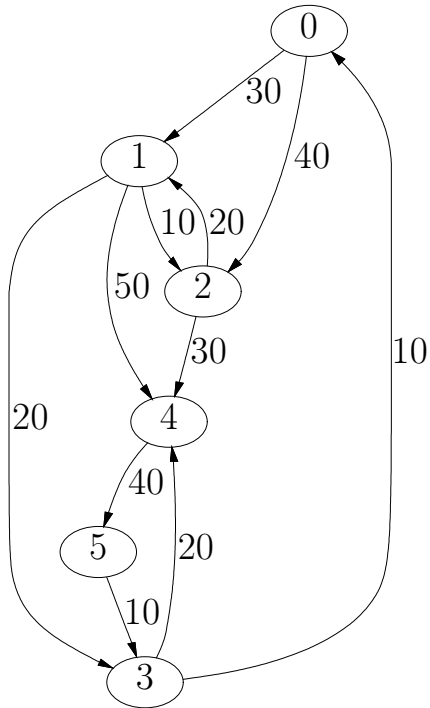
2 Dijkstra

Et voilà l'algorithme de Dijkstra.

```
 $A = \{r\}$ 
pour tout  $x \neq r$  faire
└─  $d[x] = +\infty$ 
 $d[r] = 0$ 
tant que  $A \neq \emptyset$  faire
└─ Extraire de  $A$  le sommet  $x$  tel que  $d[x]$  est minimal
└─ pour tout voisin  $y$  de  $x$  faire
└─└─ NB : ceci est relax(x,y)
└─└─ si  $d[x] + l(x, y) < d[y]$  alors
└─└─└─  $d[y] = d[x] + l(x, y)$ 
└─└─└─  $pere[y] = x$ 
└─└─└─ si  $y \notin A$  alors
└─└─└─└─  $A = A \cup \{y\}$ 
```

Exercice 3 Appliquer cet algorithme au graphe page suivante (pour les plus courts chemins depuis 0).

Exercice 4 Comment sait-on si un sommet est dans l'arbre ou non ? Faire l'analogie avec les trois ensembles de sommets manipulés par un parcours (marqué, atteint, non-atteint)



Exercice 5 Modifiez l'algorithme pour que A soit dorénavant géré comme un tas. Où placer la ou les extractions de min? Et modifications de clé?

3 Longueurs négatives

Maintenant on généralise notre problème de plus courts chemins. La longueur d'un arc peut être négative! On a $l : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 6 Les plus courts chemins ne sont plus correctement définis dans tous les cas. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse définir $dist(r, s)$ et "plus court chemin de r à s ".

Exercice 7 Montrez que l'algorithme de Dijkstra n'est pas valable lorsque les arêtes peuvent avoir des poids négatifs (trouver un exemple) même si les distances sont bien définies.

Bellman-Ford, lui, marche par contre bien si les poids sont négatifs

Exercice 8 1. Montrez que si au $nieme$ tour de la boucle externe de Bellman-Ford il existe un sommet x tel que $d[x]$ diminue alors il existe un cycle de longueur négative.

2. Inversement, montrez que si au $nieme$ tour d reste constant pour tout sommet il n'y a pas de cycle de longueur négative

3. Dédisez-en une version **robuste** de Bellman-Ford :
- soit elle calcule les plus courts chemins de r à tout x
 - soit elle affiche "erreur, distances de $-\infty$ "

4 Taux de change optimal

On souhaite convertir de l'argent d'une devise dans une autre. Le problème est que toutes les conversions ne sont pas possibles : pour deux monnaies A et B , on peut parfois convertir de l'argent de A en B , parfois non. On considère donc un *graphe de change* $G = (V, E)$ entre monnaies donnant les conversions possibles. Ce graphe est orienté (parfois on peut convertir A en B mais pas B en A).

La *fonction de change* est une fonction c telle que

- une somme S en monnaie A vaut $S.c(A, B)$ en monnaie B (les taxes éventuelles sont incluses).
- $c(A, B)$ est défini si et seulement si (A, B) est un arc du graphe de change.
- $c(A, B) > 0$

Le *graphe de change étendu* est le graphe $G' = (V, E, c)$ pondéré par la fonction de change. Une *séquence de change* est la conversion d'une monnaie A_1 en monnaie A_k en passant par les monnaies intermédiaires $A_2 \dots A_{k-1}$ (en supposant bien sûr toutes ces conversions possibles). Il lui correspond un chemin dans le graphe de change.

Exercice 9 Quel est le taux de change de A_1 en A_k dans une séquence de change A_1, A_2, \dots, A_k ?

Exercice 10 Dans quelle condition (exprimée sur G') quelqu'un peut-il devenir *infimement riche* en changeant de l'argent ?

Étant données deux séquences de change différentes de la monnaie A en la monnaie B , la meilleure des deux est celle qui a le taux le plus élevé.

Exercice 11 Supposons que l'on connaisse une séquence de change S_1 de la monnaie A en la monnaie B , d'une part, et une séquence S_2 de la monnaie A en la monnaie C d'autre part. Supposons que l'arc (C, B) existe, dans le graphe de change. Écrivez une condition de *relaxation* en comparant les taux des séquences S_1 d'une part, S_2 puis (C, B) d'autre part, et gardant la meilleure.

Exercice 12 Écrivez une version modifiée de l'algorithme de Bellman-Ford, utilisant cette condition de relaxation modifiée, donnant les meilleurs taux de change d'une monnaie A vers toutes les autres.

Pourquoi est-ce correct ?

indication : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

Exercice 13 Même question avec Dijkstra : est-ce que ça marche ?