Université Paris Diderot – Paris 7 | Algorithmique
L3 Informatique | Semaine du 24 octobre 2011

TD n°5

Les ponts de Königsberg

On rappelle qu'un **graphe** non-orienté G est un couple (V, E) où V est un ensemble de n **sommets** et E un ensemble de m arêtes. Une **arête** est une paire de sommets. Un **chemin** est une suite d'arêtes, chacune ayant un sommet en commun avec la précédente : $C = (\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, ...\{x_{k_1}, x_k\})$ est un chemin de x_1 à x_k. Un **cycle** est un chemin où le premier sommet est égal au dernier.

1 Connexité

Exercice 1 [**Connexité**] On considère les deux définitions suivantes :

1. Pour tous sommets x et y il existe un chemin de x à y .
2. Pour toute **bipartition** de V en deux ensembles disjoints V_1 et V_2 (dont l'union fait V) il existe au moins une arête ayant une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2.

Montrez l'équivalence de ces deux définitions (qui définissent la *connexité*)

2 Degré

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité. On le note $d(x)$.

Exercice 2 Montrez que :

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

Exercice 3 Justifiez ou infirmez les propositions suivantes :

1. dans un graphe il y a un nombre pair de sommets ayant un degré impair.
2. dans un graphe il y a un nombre impair de sommets ayant un degré pair.

3 Euler et les ponts de Königsberg

Au 18ème siècle une question animait les dîners des notables de la petite ville de Königsberg en Prusse orientale (aujourd'hui Kaliningrad). À l'époque la ville comptait sept ponts qui franchissaient le fleuve Pregolia. Ces ponts reliaient les deux îles et les rives de Königsberg. La question qui faisait débat à l'époque était de savoir si, lors de la promenade dominicale, il était possible de passer une fois et une seule par chaque pont de la ville et de revenir à son point de départ. En 1736, Leonhard Euler apporta la réponse à ce problème. Saurez-vous en faire autant ?

Un cycle C est dit eulérien ssi C passe une fois et une seule par chaque arête du graphe. Un graphe G est eulérien si et seulement si il admet au moins un cycle eulérien. En d'autres termes, on peut ordonner ses arêtes en $e_1...e_m$ tels que pour tout $i < m$ les arêtes e_i et e_{i+1} ont un sommet commun, ainsi que les arêtes e_m et e_1.

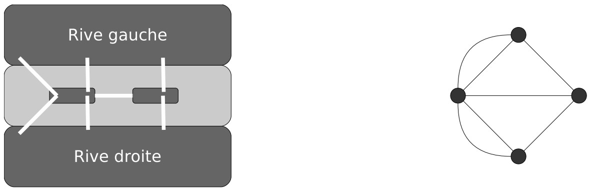

Figure 1 – Schéma des ponts de Königsberg, et le multi-graphe associé.

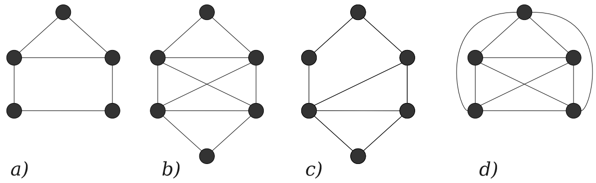

Figure 2 – Variation autour de la maison-dessinée-sans-lever-le-crayon

Exercice 4 Les graphes de la figure 2 sont-ils eulériens ? Si oui, exhiber un cycle eulérien, si non, comment peut-on se convaincre qu'ils ne sont pas eulériens ?

Exercice 5 Montrez que si un sommet a degré impair alors le graphe n'est pas eulerien.

Exercice 6 Montrez qu'un graphe non connexe n'est pas eulerien

On imagine maintenant que l'on peut *marquer* les arêtes. Informellement, c'est ce que l'on fait quand on parcours le graphe avec un feutre sans relever la main. Formellement, le marquage est une fonction booléenne $E(G) \mapsto \{0, 1\}$.

Une *marche* est l'algorithme suivant :

1. Prendre une arête non marquée e
2. La marquer
3. Choisir une arête non marquée f incidente à e (ayant un voisin en commun)
4. Goto 2

La marche s'arête quand la condition 3 ne peut être remplie.

Exercice 7 Montrez que si tous les sommets ont degré pair, alors la marche stoppe nécessairement sur le sommet de départ.

Exercice 8 Sur un exemple, montrez que la marche ne construit pas toujours un cycle eulerien.

Exercice 9 En utilisant des marches, faire un algorithme qui trouve un cycle eulerien, s'il en existe un

Exercice 10 Retrouvez le fameux théorème d'Euler sur la condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un cycle eulerien, et dites pourquoi votre algorithme en constitue une preuve.

4 La variante de Sir William Rowan Hamilton

Sir William Rowan Hamilton (4 août 1805 - 2 septembre 1865) est un mathématicien, physicien et astronome irlandais (né et mort à Dublin). Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique. [source : wikipedia]

Il donna la définition suivante : Un cycle C est dit hamiltonien ssi C passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe. Un graphe est hamiltonien ssi il admet un cycle hamiltonien.

Exercice 11 Si un tel cycle existe quelle est la taille de ce cycle ?

Exercice 12 Indiquez si les graphes de la figure 3 sont hamiltoniens. Si oui montrer le cycle hamiltonien. Sinon dites pourquoi.

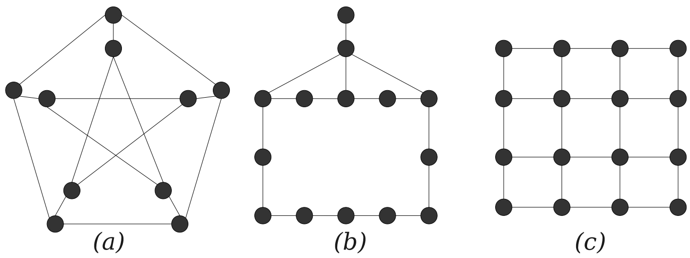

FIGURE 3 – (a) Graphe de Petersen 3-régulier, (b) maison agrandie, (c) grille

Exercice 13 Proposez un algorithme simple pour trouver si un tel cycle existe. Quelle est sa complexité ?