

Un tri spécial

Michel Habib
M1 algorithmique Avancée 2012

2 février 2012

Plan

- 1 Tri par retournements

Algorithmes

Définition

Ensemble de règles opératoires dont l'application permet de **résoudre** un problème au moyen d'un nombre **fini** d'opérations.

Origine de ce mot

Abu Ja'far Mohamed Ibn Al-Khowarizmi

(Père de Ja'far, fils de Mohamed, né à Khowarizimi)

Mathématicien persan IX ème siècle qui a écrit le premier recueil d'algorithmes.

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Données: σ une permutation de $[1, n]$

Résultat: une permutation σ' telle que $\sigma'(1) = 1$

tant que $\sigma(1) \neq 1$ **faire**

└ Renverser l'ordre des $\sigma(1)$ premiers éléments

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Considérons σ une permutation de $[1,7]$

- 6 3 1 7 2 5 4
- 5 2 7 1 3 6 4
- 3 1 7 2 5 6 4
- 7 1 3 2 5 6 4
- 4 6 5 2 3 1 7
- 2 5 6 4 3 1 7
- 5 2 6 4 3 1 7
- 3 4 6 2 5 1 7
- 6 4 3 2 5 1 7
- 1 5 2 3 4 6 7 OUF!

À vous de faire sur la permutation :

3 1 5 7 4 6 2

Combien de retournements ?

Conséquences :

Cela doit toujours s'arrêter !!

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Terminaison

On peut montrer que l'algorithme précédent termine en un nombre fini d'étapes.

Ebauche de preuve

- 6 3 1 7 2 5 4
- 0 0 0 0 0 0 0
- 5 2 7 1 3 6 4
- 0 1 0 0 0 1 0
- 3 1 7 2 5 6 4
- 0 0 0 0 1 1 0
- 7 1 3 2 5 6 4
- 0 0 1 0 1 1 0
- 4 6 5 2 3 1 7
- 0 0 0 0 0 0 1 ...

Complexité

On peut borner par $O(2^n)$ on considérant que l'on va de

0 0 0 0 0 0 0

à

1 1 1 1 1 1 1 de manière strictement monotone suivant un ordre lexicographique

Conjecture de Chvátal

L'algorithme est en $O(n^2)$?

Des exemples difficiles :

6 2 1 10 11 8 12 3 4 7 9 5
nécessite 172 retournements

2 8 11 12 4 1 10 9 3 6 7 5
nécessite 171 retournements

Les plus mauvais cas avec 12 éléments

Moralité

- Il n'est pas si facile d'analyser la complexité (le comportement) d'un algorithme possédant une seule instruction.
- Ces opérations de retournement interviennent **dans la nature** sur les génomes et sont très étudiées en bioinformatique (tri par inversion de permutations).

Tout ce que l'on sait à ce jour

- Il existe un exemple en $O(n^2)$
- En moyenne c'est $O(n)$

Un outil pour les schémas logarithmiques

Nom : Inférieur à la demi-somme

Données : une liste de n entiers a_1, \dots, a_n positifs ou nuls

Résultats : i tel que $a_i \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j$