

Notes de cours:
Géométrie discrète

Christophe Fiorio, Michel Habib, P. Janssen
email:{fiorio, habib, pja}@lirmm.fr

27 avril 2007

Chapitre 1

Graphes planaires

1.1 Définitions de base

Les notions étudiées ci-après de planarité, sont parmi les notions les plus délicates à présenter de la théorie des graphes car elles utilisent de la topologie (notions de voisinage) de la géométrie (coordonnées, distances) et de la combinatoire (gestion de tous les associations possibles).

Cependant l'étude des graphes planaires est indispensable en imagerie, car toute image 2D peut être représentée par un graphe planaire.

Définition 1 *Un graphe $G = (X, E)$ non orienté est dit planaire s'il admet une représentation dans le plan dans laquelle les arêtes ne se croisent qu'aux sommets.*

Une représentation planaire d'un graphe est appelée un graphe planaire topologique ou plongement, on la notera $\phi(G)$. On posera $|X| = n$ et $|E| = m$.

Tous les graphes ne sont pas planaires, ainsi $K_{3,3}$ et K_5 ne le sont pas.

Un graphe planaire peut avoir plusieurs plongement planaires non isomorphes.

Dans un plongement planaire on associe à chaque sommet un point du plan et les arêtes sont des courbes continues du plan "arcs de Jordan". Cependant pour l'usage que nous en ferons nous pouvons faire l'hypothèse que les arêtes sont représentées par des lignes polygonales (suite finie de segments de droites).

Commençons par quelques définitions de topologie :

Définition 2 *U un ensemble de points de R^2 est appelé un **ouvert**, s'il vérifie :*

$\forall p \in U, \exists \epsilon > 0$ tel que $\forall p'$ vérifiant $d(p, p') \leq \epsilon$ alors $p' \in U$.

Les deux définitions suivantes utilisent un plongement planaire $\phi(G)$ de G .

Définition 3 *O un ouvert de R^2 est appelé une **région** de R^2 par rapport à $\phi(G)$, s'il vérifie :*

$\forall p, p' \in O$, il existe une ligne polygonale qui va de p à p' sans croiser d'arête de $\phi(G)$.

Définition 4 *Une région F maximale est appelée une **face** de $\phi(G)$.*

La version restreinte du théorème de Jordan :

Théorème 1 *Une ligne polygonale simple fermée partage le plan en 2 régions (l'intérieur et l'extérieur).*

Soit F l'ensemble des faces de $\phi(G)$, on notera $|F| = f$ et $f = f_0 + 1$ où f_0 représente le nombre de faces finies.

Théorème 2 *Si G est connexe, pour tout plongement planaire $\phi(G)$ de G vérifie la relation d'Euler :*

$$\boxed{n - m + f = 2}$$

Preuve: La preuve se fait à l'aide d'une induction simple sur le nombre de sommets.

– Pour $n = 1$.

Lorsque $m = 0$, il n'y a qu'une face et la relation est vérifiée. On procède alors par induction sur le nombre d'arêtes en remarquant qu'un tel graphe est constitué de m boucles sur l'unique sommet. Si on considère une boucle, d'après le théorème précédent elle sépare le plan en deux. On peut donc enlever une boucle et cela revient à enlever exactement une face et donc cela marche par induction.

– Dans le cas où $n > 1$.

Comme G est connexe il admet au moins une arête $e = [a, b]$. On contracte cette arête, cela nous donne un nouveau graphe G' ayant une arête et un sommet de moins. Cette opération ne peut ni supprimer ni créer de face donc on peut conclure en utilisant l'hypothèse d'induction. ■

Il existe une autre preuve directe, basée sur la construction d'un arbre recouvrant T de $\phi(G)$. À chaque arête du coarbre de $\phi(G)$ on associe l'arête correspondante du dual. Cela nous permet de construire un arbre recouvrant de $\phi(G)^d$. Donc $m = n - 1 + f - 1$. Cette très jolie preuve est tirée de [?].

En conséquence le nombre de faces de $\phi(G)$ ne dépend pas du plongement de ϕ (ne dépend que des nombres de sommets et d'arêtes).

On peut aussi remarquer que les faces finies de G supposé connexe constituent une base de l'espace des cycles et l'on a :

$f_0 = m - n + 1 = \nu(G)$ formule du nombre cyclomatique d'un graphe, i.e. la dimension de l'espace vectoriel des cycles de G , ce qui engendre une autre preuve de la relation d'Euler.

Cette égalité n'implique pas que pour tout cycle μ de G , il existe un plongement $\phi(G)$ dans lequel ce cycle μ soit une face (pour s'en convaincre, il suffit de considérer un cycle à 4 sommets muni de deux diagonales K_4).

Remarque : En fait la relation d'Euler est valable pour un plongement sur une surface orientable S de genre $genre(S)$:

$$\boxed{n - m + f = 2 - 2genre(S)}$$

Rappelons que le genre de la sphère est 0, surface équivalente au plan, donc aussi de genre 0.

Corollaire 1 *Un polyèdre convexe P de R^3 ayant n sommets, f faces et m arêtes vérifie $n - m + f = 2$.*

En effet on peut représenter sans croisement sur la sphère un tel polyèdre. En prenant une face quelconque du polyèdre comme face infinie on peut obtenir une représentation plane de P sur lequel on applique la formule d'Euler.

Cette formule n'est plus valable si le polyèdre admet des trous, il y a des contre-exemples.

1.2 Dualité

Définition 5 *A tout plongement planaire $\phi(G)$ d'un graphe $G = (X, E)$, on peut associer son dual, i.e. un autre graphe $\phi(G)^d$ dont les sommets sont les faces de $\phi(G)$ et l'adjacence entre faces est définie par les arêtes communes aux deux faces dans $\phi(G)$. À chaque arête commune aux deux faces, on associe une arête dans $\phi(G)^d$. Ainsi même si $\phi(G)$ est un graphe simple, $\phi(G)^d$ peut être un multigraphe.*

Une représentation planaire de $\phi(G)^d$ s'obtient aisément, il suffit de mettre un point au milieu de chaque face de $\phi(G)$ et de les relier à toutes les faces adjacentes.

Exemple célèbre : le diagramme de Voronoi [?] et la triangulation de Delaunay (Charles Eugène Delaunay, mathématicien Français 1816-1872), sont deux graphes planaires duaux définis à partir d'un ensemble de points.

Ainsi $\phi(G)^d$ admet f sommets et m arêtes (car une arête de $\phi(G)^d$ correspond exactement à une arête de $\phi(G)$).

Il est facile de vérifier que $(\phi(G)^d)^d$ est isomorphe à $\phi(G)$ si et seulement si G est connexe. En effet le passage au dual préserve la connexité, mais si un graphe admet plusieurs composantes connexes son plongement $\phi(G)$ aussi. Cependant $(\phi(G)^d)$ est connexe

(grâce à la face infinie) et donc aussi $(\phi(G)^d)^d$ qui ne peut donc pas être isomorphe à $\phi(G)$.

Cependant il existe des graphes (par exemple un cycle avec deux arêtes pendantes) pour lesquels tous les plongements bien que combinatoirement isomorphes ne sont pas topologiquement équivalents (sur l'exemple du cycle, suivant que l'on mette les deux arêtes pendantes dans la même face ou non). Ces deux plongements même s'ils sont combinatoirement isomorphes, ne sont pas topologiquement équivalents.

Ainsi il existe des graphes planaires G possédant deux plongements $\phi(G)$ et $\phi'(G)$ tels que $\phi(G)^d$ et $\phi'(G)^d$ ne sont pas combinatoirement isomorphes.

En outre on peut montrer :

Un graphe n'admet qu'un plongement planaire (à un isomorphisme près préservant la topologie) s'il est 3-connexe. Dans un tel cas on peut vraiment parler du graphe dual G^d d'un graphe planaire G .

1.3 Cas particulier des graphes simples

On dit qu'un graphe G est *simple* s'il n'admet ni boucle ni arête multiple. Pour un graphe planaire être simple implique que pour tout plongement les faces ont au moins trois arêtes :

$$\forall \alpha \in F, \text{degre}(\alpha) \geq 3$$

$$\text{d'où} : 2m = \sum_{\alpha \in F} \text{degre}(\alpha) \geq 3f,$$

$$\text{et donc } \boxed{f \leq \frac{2m}{3}}.$$

En reportant dans la formule d'Euler, on obtient :

$$m = n - 2 + f \leq n - 2 + \frac{2m}{3} \text{ d'où} : \boxed{m \leq 3n - 6}$$

De même on a $f \leq \frac{2m}{3} \leq 2/3(3n - 6)$, c'est à dire :

$$\boxed{f \leq 2n - 4}.$$

On peut retenir que pour les graphes planaires simples $m, f \in O(n)$.

1.4 Exercices

1. On considère un graphe planaire G et un de ses plongement $\phi(G)$, montrer que pour toute face F de $\phi(G)$, il existe un plongement $\psi(G)$ dans lequel F est la face infinie.
2. Montrer en utilisant la formule d'Euler que $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires. Proposer une autre preuve, sans utiliser la formule d'Euler.

3. $K_{3,3}$ et K_5 sont-ils plongeables planairement sur un tore, un ruban de Moebius ?
4. Montrer qu'un graphe planaire simple admet au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.
En déduire qu'un ballon de football ne peut être uniquement réalisé par coutures de pièces de cuir hexagonales.
5. Déduire aussi de cette propriété un codage efficace en mémoire d'un graphe planaire. Préciser le nombre de bits nécessaires pour coder un graphe planaire ayant n sommets.
6. Montrer que toute triangulation d'un polygone à n côtés utilise exactement $n - 3$ diagonales pour créer $n - 2$ triangles.
7. Les solides platoniciens. Montrer qu'il n'existe que 5 solides ou polyèdres qui soient réguliers de degré k et dont toute face soit un polygone régulier à d côtés.

1.5 Graphes planaires maximaux

Nous appellerons graphe planaire maximal un graphe simple planaire G , tel que l'ajout d'une arête lui fasse perdre cette planarité.

Il est facile de vérifier que dans un tel graphe toute face est un triangle (même la face infinie) et le nombre d'arêtes vérifie $m = 3n - 6$. En fait, nous avons les équivalences suivantes pour un graphe simple et planaire G :

G est maximal ssi toute face est un triangle ssi $m = 3n - 6$.

De tels graphes sont presque composés de 3 arbres recouvrants (ce qui ferait $3n-3$ arêtes) et il y a eu de nombreux travaux de recherche sur ce sujet.

Chapitre 2

Cartes combinatoires

2.1 Introduction

Décrire un objet uniquement par ses bords n'est pas suffisant (voir Figure ??), on a besoin d'informations supplémentaires telles que les relations d'incidence entre les faces, arêtes et sommets : on a besoin de connaître la topologie de l'objet.

On structure l'objet en cellules (sommets, faces, arêtes) appelées subdivision de l'espace. *C'est une modélisation combinatoire de la topologie de l'ensemble des points définissant l'objet géométrique considéré.* Il suffit de compléter cette modélisation topologique en associant un plongement à chaque cellule (voir Figure ??) pour en avoir une description complète (topologie + géométrie).

Représenter explicitement la topologie et la séparer de la géométrie présente plusieurs avantages :

- il est très difficile (donc inefficace) de déduire les propriétés topologiques d'un objet à partir de sa géométrie. Or ces propriétés topologiques permettent de vérifier

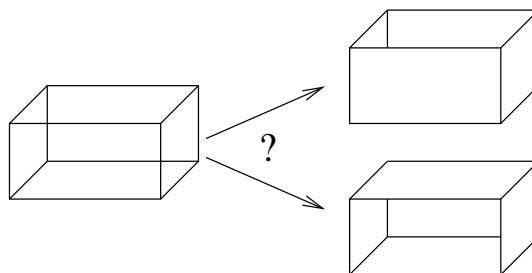


FIG. 2.1 – représentation par bords

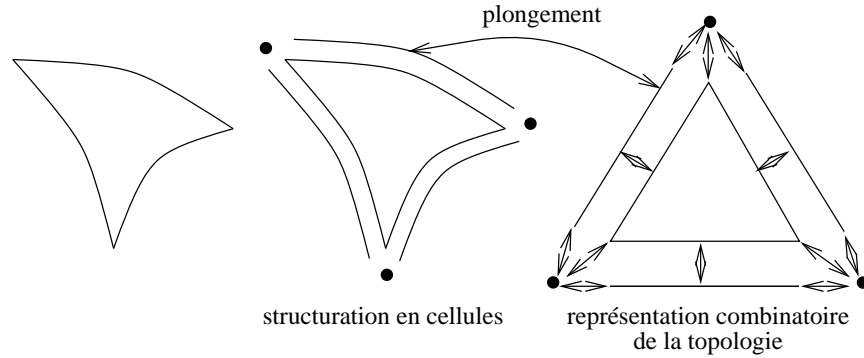


FIG. 2.2 – modélisation topologique et plongement

l'exactitude d'un objet lors de sa construction, d'aider à sa reconnaissance...

- les informations topologiques structurent les informations géométriques et permettent une manipulation efficace de ces dernières ;
- les erreurs d'approximations peuvent faire croire que deux arêtes sont disjointes, la connaissance de la topologie de l'objet permet d'éviter cela.
- on peut associer plusieurs modèles de plongement à la topologie de l'objet (« vue éclatée »).

2.2 Les 2-cartes

définitions préalables :

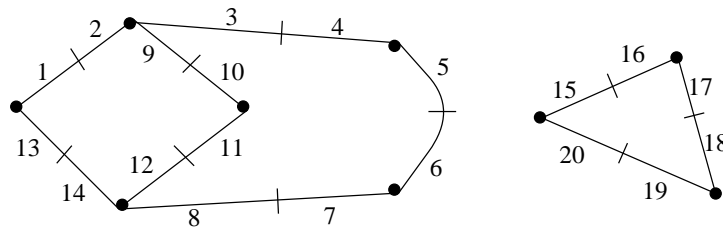
- une *involution* σ dans un ensemble E est une permutation qui satisfait $\sigma(\sigma(x)) = x$.
- un *point fixe* d'une fonction f est tel que $f(x) = x$.

Définition 6 (2-carte) Une 2-carte est un triplet $M(D, \alpha_0, \alpha_1)$ où :

- D est un ensemble fini de demi-arêtes (brins) ;
- α_0 est une involution sans point fixe sur D ;
- α_1 est une permutation dans D .

Définition 7 (orbite) Soit un ensemble D et $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ un ensemble de permutations dans D , soit $\langle P \rangle$ le groupe engendré par $\{p_1, \dots, p_k\}$, l'orbite d'un brin $x \in D$ par P est l'ensemble $\langle P \rangle(x) = \{y = \rho(x) \text{ où } \rho \in \langle P \rangle\}$ ¹

¹ ρ est une composition d'un nombre quelconque d'applications p_i, \dots, p_j



D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
α_0	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	18	17	20	19
α_1	13	5	9	5	4	7	6	14	2	12	8	10	1	11	20	17	16	19	18	15

FIG. 2.3 – un exemple de 2-carte

exemples :

- un sommet est défini par $\langle \alpha_1 \rangle (x)$
 $\langle \alpha_1 \rangle (14) = \{14, 11, 8\}$ car $\alpha_1(14) = 11$, $\alpha_1^2(14) = 8$ et $\alpha_1^3(14) = 14$,
- une arête par $\langle \alpha_0 \rangle (x)$
- une face par $\langle \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \rangle (x)$
- et une composante connexe par $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle (x)$

2.3 Les cartes généralisées

Les cartes généralisées sont une extension des cartes, elles permettent notamment de modéliser des objets non-orientables.

Définition 8 (carte généralisée) Une carte généralisée de dimension n ($n \geq -1$), où n -g-carte est un $n+2$ -uplet $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ où :

- B est un ensemble fini de brins.
- $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont des involutions sur B telles que :
 - $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, α_i est sans point fixe.
 - $\forall i \in \{0, \dots, n-2\}$, $j \in \{i+2, \dots, n\}$, $\alpha_i \circ \alpha_j$ est une involution²

Soit une n -g-carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, un brin $b \in B$ est dit *libre* si $\alpha_n(b) = b$; G est dite *fermée* si α_n est sans point fixe (il n'y a pas de brins libres), *ouverte* sinon.

²Cette condition impose que les coutures soient réalisées de manière régulière : si un brin b d'une arête est cousu alors le brin $\alpha_0(b)$ l'est aussi (et pas n'importe comment...).

Le *bord* d'une n -g-carte (le bord de l'objet modélisé) est l'ensemble des brins libres de la g -carte.

De la même manière que pour les cartes on définit les différentes cellules (sommets, arêtes, faces) d'une carte généralisée à partir de la notion d'orbite, ainsi :

- un sommet est défini par $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle(x)$,
- une arête par $\langle \alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle(x)$,
- et une face par $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n \rangle(x)$.

incidence entre cellules

Soit une n -g-carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $C = (B', \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ une i -cellule de G :

- $b \in B$ est *incident* à C si $b \in B'$.
- C_i et C_j ($i \neq j$) sont *incidentes* si il existe $b \in B$ incident à C_i et C_j .
- C_i et $C_{i'}$ sont adjacentes à la dimension j , ou *j -adjacentes*, si il existe une cellule C_j incidentes à C_i et $C_{i'}$.
- C_i et $C_{i'}$ sont *adjacentes* si elles sont (i-1)-adjacentes.

2.3.1 orientabilité et nombre de bords d'une n -g-carte

Orienter un objet revient à orienter un ensemble de faces pour définir l'intérieur et l'extérieur du volume. Cela peut permettre par exemple de déterminer les faces visibles selon un point de vue. En fait orienter consiste à *définir un sens de parcours des arêtes, des faces, tel que chaque arête soit parcourue une fois dans chaque sens*.

Proposition 1 Soit une n -g-carte fermée $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $b \in B$,

- G est orientable si $\langle \alpha_n \alpha_1, \dots, \alpha_n \alpha_{n-1} \rangle(b) \neq B$, non orientable sinon.
- G est orientable si $\alpha_0(b) \neq \langle \alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_0 \alpha_n \rangle(b)$, non orientable sinon.

2.3.2 caractéristiques d'une 2-g-carte

Le nombre de bords, le coefficient d'orientabilité et le genre permettent de caractériser des surfaces dans l'espace. Il n'existent pas de telle caractérisation pour $n \geq 3$.

Théorème 3 (Lienhardt 88) Toute 3-g-carte définit la topologie d'une subdivision de surface, orientable ou non, fermée ou non.

Réciproquement, la topologie de toute subdivision de surface peut être définie par une 2-g-carte.

quelques définitions :

Bords : $\delta(G) = (B', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$ avec $B' = \{b \in B / \alpha_n(b) = b\}$

Nombre de bords : c'est le nombre de composantes connexes de $\delta(G)$, il est noté $b(G)$.

Caractéristique d'Euler : $E(G) = \frac{Z(\alpha_0\alpha_1) + Z(\alpha_1\alpha_2) + Z(\alpha_2\alpha_0) - |B|}{2}$ où $Z(o)$ est le nombre d'orbite de la permutation o .

Genre : $g(G) = 1 - \frac{E(G) + b(G) + q(G)}{2}$

quelques remarques :

– Si G est 2-G-carte fermée, $Z(\alpha_0\alpha_1)/2$ est le nombre de faces, $Z(\alpha_1\alpha_2)/2$ est le nombre d'arêtes, $Z(\alpha_2\alpha_0)/2$ est le nombre de sommet.

– $E(G) = \#f + \#a + \#s - \frac{|B|}{2} = \#s + \#a - 2 \times \frac{|B|}{4} + \#f$, on retrouve alors la formule générale classique :

$$E(G) = \#s - \#a + \#f.$$

– Dans les graphes planaires, la formule d'Euler est donnée par $E(G) = 2 - 2g$. Ici $g = 1 - \frac{E+b+q}{2}$ soit $E = 2 - 2g + b + q$. Or un graphe planaire est fermé et orientable, donc $b = 0$ et $q = 0$.

Chapitre 3

Géométrie de la grille

3.1 Théorème de Pick [?]

On considère un polygone simple (i.e. sans croisement) dont les sommets sont situés sur un quadrillage rectilinéaire régulier (autrement dit à coordonnées entières).

Théorème 4 *Pick* $S(P) = I(P) + B(P)/2 - 1$

Où $S(P)$, $I(P)$, $B(P)$ représentent respectivement la surface de P exprimée en unités du quadrillage (ou pixels), le nombre de points du quadrillage situés à l'intérieur de P et le nombre de points du quadrillage.

Remarque 1 *Cette formule est remarquablement simple et très élégante, car elle exprime une surface comme une somme, en outre elle est très utile.*

Lemme 1 *La formule est vraie pour les rectangles et les triangles rectangles.*

Preuve: La formule se démontre aisément par induction sur n pour un rectangle de taille $m.n$. La réponse pour les triangles rectangles s'en déduit immédiatement.

Lemme 2 *On considère deux polygones P, P' n'ayant qu'un côté MN en commun. Alors si $Q = P + P'$ et si P' vérifie la formule de Pick, nous avons :*

P vérifie la formule si et seulement si Q vérifie la formule.

Preuve: Il suffit de montrer que : $S(P) - I(P) - B(P)/2 = S(Q) - I(Q) - B(Q)/2$.

Pour ce faire remarquons que :

$$S(Q) = S(P) + S(P')$$

$I(Q) = I(P) + I(P') + x$ où x représente le nombre de points du quadrillage appartenant à $]M, N[$. $B(Q) = B(P) + B(P') - 2x - 2$

Donc $S(Q) - I(Q) - B(Q)/2 = S(P) - I(P) - B(P)/2 + S(P') - I(P') - B(P')/2 + 1$,
et comme P' vérifie la formule de Pick, nous avons :

$$S(Q) - I(Q) - B(Q)/2 = S(P) - I(P) - B(P)/2$$

Preuve du théorème : Un triangle quelconque peut se transformer en un rectangle par ajout de triangles rectangles (il suffit de considérer le rectangle du quadrillage englobant ce triangle). Et donc en utilisant les deux lemmes précédents, les triangles vérifient la formule de Pick.

Considérons maintenant un polygone quelconque P . On commence par calculer une triangulation de P . Le lemme précédent nous permet d'en déduire la validité de la formule sur P .

On trouvera une preuve très intéressante du théorème de Pick par [?] comme conséquence de la formule d'Euler (cf. le problème de juin 99).

3.1.1 Exercices

1. Comment se comporte la formule si l'on tolère que le polygone P admet k trous ?
2. A-t-on une formule du même genre sur un maillage hexagonal ?

3.2 Droites discrètes

Chapitre 4

Problèmes de recherche

On connaît peu de choses sur le problème suivant, en particulier il est non classé (i.e. on ne sait s'il appartient à P ou NP).

Nom : Triangulation minimale

Données : n points du plan

Recherche : Trouver une triangulation qui minimise la somme des longueurs.

Bien entendu la triangulation de Delaunay ne fournit pas toujours une solution optimale. On peut essayer de résoudre le problème en posant des conditions sur les points.

Le graphe de visibilité d'un polygone simple du plan, est un graphe dont les sommets sont ceux du polygone et l'on met une arête entre deux sommets du graphe lorsque les sommets correspondants du polygone se "voient".

Nom : Graphe de visibilité

Données : $G = (X, E)$ un graphe non orienté

Recherche : Construire le polygone dont il est le graphe de visibilité.

On ne sait même pas si ce problème (la version problème de décision) est dans NP.

Il a été montré que pour dessiner le polygone associé à un graphe de visibilité donné il fallait prévoir une grille de taille au moins exponentielle en la taille du graphe (Lin, Skiera).

Doit-elle être doublement exponentielle ?

Chapitre 5

Énumération

5.1 Séries génératrices

Les séries génératrices permettent de passer de l'étude d'un individu ou d'une instance à l'étude d'une famille et d'exploiter des propriétés générales sur ces familles (en général des propriétés récursives).

Ainsi quand on veut calculer une suite a_n , il est souvent préférable d'étudier la série génératrice associée $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. L'idée est de traduire les équations de récurrence sur la suite a_n , afin d'en déduire une équation en $A(z)$ que l'on va résoudre.

Une telle série génératrice est à considérer ici comme un objet formel. On peut en effet définir formellement un produit sur ces séries.

Ainsi à partir de $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ on peut construire leur produit (de convolution) :

$$A(z).B(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n \text{ où } c_n = \sum_{i=0}^n a_i . b_{n-i}.$$

L'élément neutre de ce produit est la série 1 (i.e. la série $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, où $a_0 = 1$ et $a_i = 0, \forall i > 0$). On obtient ainsi une structure d'anneau sur les séries.

Ceci nous permet déjà d'obtenir quelques identités remarquables : À partir de $(1+z)^r = \sum_{k \geq 0} C_r^k z^k$, en remarquant que : $(1+z)^r (1+z)^s = (1+z)^{r+s}$, on en déduit : $\sum_{k=0}^{k=n} C_r^k C_s^{n-k} = C_{r+s}^n$, pour tout $n \geq 0$. Cette formule est appelée l'égalité de Vandermonde (mathématicien français 1735 -1796).

En outre la série $1-z$ est l'inverse de la série $1+z+z^2 \dots$. En effet en utilisant la définition ci dessus du produit, on peut vérifier que $(1-z)(1+z+z^2 \dots) = 1$. On notera $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2 \dots$

De même on peut définir formellement une dérivation, une intégration, mais aussi des log et autres sinus, cosinus, en fait dès qu'un développement en série est connu. Par

ailleurs nous n'utiliserons ces séries comme des fonctions de z , que pour remarquer que si $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, alors $A(0) = a_0$.

Comme $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 \dots$ et que la dérivée de $\frac{1}{1-z}$ est $\frac{1}{(1-z)^2}$ ainsi nous obtenons l'identité :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1)z^n.$$

Nous allons voir l'intérêt de ces séries génératrices sur deux autres exemples.

5.1.1 Applications

Fibonacci Considérons la suite de Fibonacci :

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ et } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2.$$

Pour transmettre cette définition à la série génératrice $F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n$, il suffit de remarquer :

$$\begin{aligned} F(z) &= F_0 + F_1 z + F_2 z^2 \dots + F_n z^n \dots \\ zF(z) &= F_0 z + F_1 z^2 \dots + F_{n-1} z^n \dots \\ z^2 F(z) &= F_0 z^2 \dots + F_{n-2} z^n \dots \end{aligned}$$

Ce qui donne l'égalité : $F(z) - zF(z) - z^2 F(z) = z$, d'où $F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$.

Nous savons que :

$$\frac{1}{1-\alpha z} = 1 + \alpha z + \dots + \alpha^n z^n \dots \text{ il suffit donc de résoudre de système :}$$

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z}$$

c'est à dire :

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A(1-\beta z) + B(1-\alpha z)}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{A+B-(A\beta+B\alpha)z}{1-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta z^2}$$

En identifiant on obtient $A = -B$, $\alpha\beta = -1$, $\alpha + \beta = 1$.

Donc α et β sont les racines de l'équation : $z^2 - z - 1 = 0$ et $A = \frac{1}{\alpha-\beta}$ c.a.d.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803 \text{ (le nombre d'or) et } \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,61803.$$

Ainsi on remarque :

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\psi z} \right)$$

On en déduit donc en identifiant le coefficient de z^n , que :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \psi^n).$$

Formule démontrée par Euler en 1765, retrouvée par Binet en 1843. Lorsque n est grand $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^n$.

Une fois cette formule obtenue, si l'on n'accepte pas le passage par les séries génératrices, on peut toujours la démontrer par induction :

Elle est vérifiée pour $n = 0$ car $F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$, et pour $n = 1$, car $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi - \psi) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}) = 1$.

Supposons que $\forall k \leq n, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)$.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n + \phi^{n-1} - \psi^n - \psi^{n-1})$$

D'où $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n-1}(1 + \phi) - \psi^{n-1}(1 + \psi))$, comme $1 + \phi = \phi^2$ et $1 + \psi = \psi^2$ on a :

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n-1}\phi - \psi^{n-1}\psi^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \psi^{n+1}). \text{ Et voilà le travail!}$$

Remarque : Certains auteurs définissent la suite des nombres de Fibonacci avec les conditions initiales : $F_0 = 1, F_1 = 1$ et dans ce cas l'équation devient : $F(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ et l'on obtient $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \psi^{n+1})$.

Exercice : Montrer que deux nombres consécutifs de Fibonacci sont premiers entre eux.

Catalan Considérons b_n le nombre d'arborescences binaires complètes à n noeuds (sommets internes). rappelons que dans une arborescence complète, chaque sommet non feuille admet exactement deux fils.

Par convention $b_0 = 0$ et il est facile de voir que :

$b_n = \sum_{i=1}^{i=n-1} b_i b_{n-i-1}$ pour $n \geq 2$. Cette égalité ne fait que traduire qu'une arborescence à n noeuds peut s'obtenir en ajoutant une racine et en y collant une arborescence ayant i noeuds et une ayant $n-k-i$ noeuds.

Cette relation fait penser au produit de convolution.

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = 1 + \sum_{n \geq 2} (\sum_{i=0}^{i=n-1} b_i b_{n-i-1}) z^n$$

D'où la relation : $B(z) = 1 + zB^2(z)$

Une équation du second degré en $B(z)$ qui admet deux racines :

$$\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} \text{ et } \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Comme $B(0) = b_0 = 0$, en prenant la limite lorsque z tend vers 0, on en déduit que la seule racine possible est $\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$. Il suffit maintenant de trouver le développement en série de cette racine.

$$\text{En fait } \sqrt{1-4z} = (1-4z)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n \geq 0} C_{\frac{1}{2}}^n (-4^n) z^n.$$

Car la formule : $(1+z)^r = \sum_{k \geq 0} C_r^k z^k$ est valide avec r réel quelconque, en posant :

$$C_r^k = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

$$\text{D'où } \sqrt{1-4z} = \sum_{k \geq 0} \frac{1/2(-1/2)(-3/2)\dots(3-2k)/2}{k!} (-4z)^k$$

$$= 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!(-4)^k z^k}{k! 2^k 2^{k-1} (k-1)!}$$

$$= 1 - \sum_{k \geq 1} \frac{(2k-2)! 2}{k!(k-1)!} z^k$$

$$\text{D'où } B(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{n \geq 1} \frac{(2(n-1))!}{n!(n-1)!} z^{n-1}.$$

$$\text{d'où en identifiant le coefficient de } z^n : b_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Exercice : Trouver une autre preuve de ce résultat, par induction par exemple.

Un autre usage très intéressant des séries génératrices en analyse d'algorithmes, revient à poser, pour un algorithme A donné et une taille de donnée k fixée :

a_n = la probabilité que l'algorithme A utilise n opérations.

Naturellement : $\sum_{n \geq 0} a_n = 1$.

On considère alors la série génératrice : $G(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Et $G'(1)$ est la valeur moyenne du nombre d'opérations de A , de même on peut obtenir la variance à partir de $G''(1)$.

5.2 Dénombrements

Le nombre de chemins différents d'un quadrillage allant du point $(0, 0)$ au point de coordonnées (p, q) n'utilisant que des liens W ou N est exactement :

$$C_{n+m}^n = C_{n+m}^m.$$

De même C_{2n}^n est le nombre de chemins du NE, SE de longueur $2n$ dont l'origine et l'extrémité ont la même abscisse (Chemins du grand Dyck).

Mots de Dyck Ce sont les mots $\omega \in \{x, y\}^*$ ayant autant de x que de y , et dans lequel tout facteur gauche u de ω (i.e. $\omega = u.v$) vérifie $|u_x| \geq |u_y|$.

Ils satisfont à la grammaire :

$$D = \epsilon + xDyD$$

On peut leur associer une représentation graphique en interprétant x (resp. y) comme un lien NE (resp. SE), et cela donne des chemins qui sont toujours au dessus de l'axe des abscisses.

On peut établir une bijection entre les mots de Dyck de longueur $2n$ et les arborescences complètes ayant $2n + 1$ sommets dont n sommets internes et $n + 1$ feuilles. Mais aussi avec les différentes façons de calculer un produit de $n + 1$ termes.

La manière la plus simple d'établir une telle bijection est de le faire au niveau des grammaires. Il suffit d'établir qu'il existe deux grammaires non ambiguës isomorphes.

A partir de cette grammaire, il est facile de remarquer que si l'on note b_n le nombre de mots de Dyck de taille $2n$, il vérifie les équation de récurrence :

$$b_0 = 0, b_1 = 1 \text{ et } b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-i-1}$$

En utilisant les résultats précédents on peut en déduire que le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$ est exactement : $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Exercice : Proposer une façon directe d'obtenir cette valeur en utilisant le dénombrement des chemins du grand Dyck.

Polyominos parallélogrammes À l'aide de grammaires non ambiguës on peut construire une bijection entre les mots de Dyck non vides de longueur $2n$ et les polyominos parallélogrammes de périmètre $2n + 2$.

Chapitre 6

Annexe

6.1 Fonction d'Ackermann

La fonction d'Ackermann doublement récursive, se définit classiquement :

Ackermann(m, n) =

if $m=0$ **then**

└ $n+1$

else

┌ **if** $n=0$ **then**

└ $A(m-1, 1)$

else

└ $A(m-1, A(m, n-1))$

Cette fonction croit extraordinairement vite et on peut lui associer une espèce d'inverse :

$$\alpha(m, n) = \min_{i \geq 1} \{A(i, \lfloor m/n \rfloor) > \log n\}.$$

Fonction qui va croître très lentement.

Variante : certains auteurs utilisent une fonction d'une variable

$$\alpha(n) = \min_{i \geq 1} \{A(i, i) > \log n\}.$$

Considérons les fonctions logarithmique itérées :

$$\log^{(i)} n = \log \log \log \dots \log n \text{ où le logarithme est itéré } i \text{ fois.}$$

Ou encore :

$$\log^* n = \min\{y \in \mathbb{N} \mid 2^{2^{\dots}} \geq n, \text{ "une tour d'exponentielle de hauteur } y\}\}.$$

Autrement dit \log^*n donne le nombre d'itérations successives de la fonction logarithme nécessaires pour obtenir à partir de n une valeur inférieure à 1.

$$\log^*n = i \iff \log^{i-1}n > 1 \text{ et } \log^i n \leq 1.$$

Et cette fonction vérifie : $\alpha(n) \leq \log^*n$, pour $\forall n \in N$.

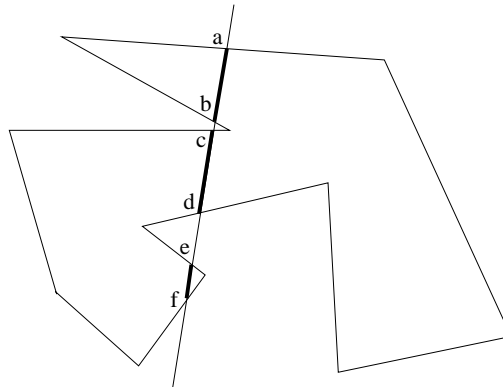
Chapitre 7

Recueil d'examens

7.1 Septembre 97

Première partie : Algorithmique

1. Soit $P = p_1, p_2, \dots, p_n$ un polygone simple (selon la convention habituelle, les points de P sont donnés dans l'ordre inverse des aiguilles d'une montre). Soit $S = [s_1, s_2]$ un segment de droite. Il s'agit de calculer l'ensemble des sous-segments de S inclus dans P . Pour simplifier les algorithmes on supposera que S ne coupe pas P en des points de P . Pour l'exemple ci-dessous la réponse à fournir est $\{[a, b], [c, d], [e, f]\}$.

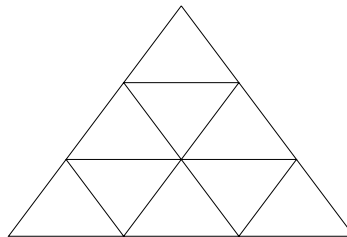


- (a) Donnez un algorithme lorsque P est un polygone convexe
 - (b) Donnez un algorithme dans le cas général.
(On pourra utiliser un algorithme de balayage)
2. On considère maintenant un polyomino horizontalement convexe P , défini par la liste de ses sommets (ou de manière équivalente par son contour), et un polyomino rectangle R .
- Proposer un algorithme qui calcule la meilleure superposition de R sur P . En fait, R est translatable horizontalement et/ou verticalement et l'on cherche le positionnement de R sur P qui maximise la surface commune.
 - ** Améliorez la complexité de l'algorithme en utilisant une autre représentation de P et R .

Bien sûr vous devez justifier chaque algorithme et donner les complexités.

Deuxième partie : Enumération

1. On considère un parc de stockage à n places, sur lequel on doit stocker des voitures à la sortie de la production d'une usine. Il n'y a que deux types de voiture produites des Mini et des Maxi. Par convention une Mini prend une place et une Maxi deux places. On considère le garage comme un rectangle $1.n$. Quel est le nombre de façons différentes d'y mettre des voitures ?
2. Soit P un polygone à n sommets vérifiant : tout segment reliant deux sommets du polygone est entièrement inclus dans le polygone. Un tel segment est appelé une diagonale. P est-il nécessairement convexe ? Dénombrer le nombre de diagonales qui s'intersectent.
3. ** On considère un maillage plan $n \times n$ constitué de triangles équilatéraux (cf figure pour $n=3$).



Quel est le nombre total de triangles que l'on peut dessiner sur ce maillage. (Les

sommets des triangles sont des points du maillage). Pour l'exemple de la figure il y a 13 triangles. Expliquer votre raisonnement une simple formule ne suffit pas. On peut commencer par calculer les premières valeurs et chercher une formule de récurrence.

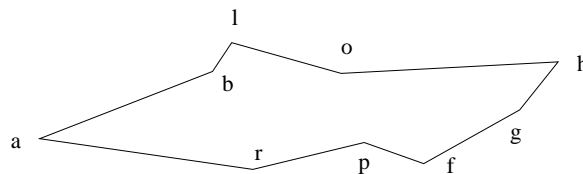
7.2 Septembre 98

Algorithmique

Rappel : Un polygone est monotone par rapport à l'axe (Ox) ssi il est simple et si toute droite parallèle à l'axe (Oy) intersecte le contour de P en au plus 2 points.

On représentera un tel polygone par 2 tableaux Binf et Bsup. Binf (respectivement Bsup) contient les points du bord inférieur (respectivement supérieur) du polygone, rangés dans l'ordre cartésien.

Le polygone ci-dessous est représenté par Binf=[a,r,p,f,g,h] et Bsup=[a,b,l,o,h].



Etant donné un ensemble E de n points d'abscisses distinctes on cherche un algorithme construisant un polygone monotone par rapport à l'axe (Ox) et dont les sommets du contour sont les points de E .

Montrez qu'étant donné E , il peut exister plusieurs polygones monotones passant par les points de E .

Un premier algorithme proposé en juin consiste à trier les points de E selon l'ordre cartésien (soit p_1, p_2, \dots, p_n l'ordre obtenu) et à définir Bsup=[p_1, p_2, \dots, p_n] et Binf=[p_1, p_n]. Donnez un exemple montrant que cet algorithme est faux.

Un deuxième algorithme proposé en juin consiste à calculer p_{min} et p_{max} les points d'abscisses minimum et maximum, à partitionner les points de $E - \{p_{min}, p_{max}\}$ en 2 sous-ensembles : E_1 les points ayant une ordonnée supérieure à celle de p_{min} et E_2 les

points ayant une ordonnée inférieure ou égale à celle de p_{min} . Bsup est alors composé des points de $E_1 \cup \{p_{min}, p_{max}\}$ triés selon l'ordre cartésien, Binf est composé des points de $E_2 \cup \{p_{min}, p_{max}\}$ triés selon l'ordre cartésien. Donnez un exemple montrant que cet algorithme est faux.

Donnez à présent un algorithme correct pour ce problème (l'idée de partitionner les points de E est bonne, il s'agit de trouver le bon critère de partition). Quelle est sa complexité ?

Donnez un algorithme testant si un point appartient à la région intérieure d'un polygone monotone par rapport à l'axe (Ox).

Bien sûr il s'agit d'améliorer la complexité de l'algorithme vu en cours dans le cas d'un polygone simple.

Planarité

1. Montrer que tout arbre admet un dessin planaire.
2. Montrer que toute arborescence admet un dessin planaire ordonné (i.e. l'origine d'un arc est au dessus de son extrémité).
3. On veut dessiner des arborescences binaires de recherche sur un écran en respectant les contraintes suivantes :
 - La racine de l'arborescence est placée en haut du dessin.
 - Le dessin doit être planaire ordonné.
 - Le dessin doit respecter la gauche et la droite (i.e. le fils gauche (resp. droit) d'un sommet doit est placé à gauche (resp. droite) de ce sommet.
 - Les arcs doivent êtres dessinés par des segments de droite.

Montrer qu'une telle représentation existe toujours.

4. Il s'agit maintenant de minimiser la surface du dessin. Proposer un algorithme de dessin et évaluer en fonction des paramètres de l'arborescence la hauteur puis la surface nécessaire pour la réalisation de votre algorithme.
5. Si l'on autorise des courbes monotones au lieu des segments de droites, peut-on faire un meilleur algorithme (qui utilise une surface moindre) ?

Énumération

1. Quel est le nombre d'arborescences binaires ayant n feuilles ?
2. Présenter des objets combinatoires en bijection avec les arbres binaires ayant n feuilles.

7.3 Juin 1999

Une autre preuve du théorème de Pick

On considère un polygone simple (i.e. sans croisement) dont les sommets sont situés sur un quadrillage rectilinéaire régulier (autrement dit à coordonnées entières).

$$\text{rappel du théorème de Pick 1899 : } S(P) = I(P) + B(P)/2 - 1$$

où $S(P)$, $I(P)$, $B(P)$ représentent respectivement la surface de P exprimée en unités du quadrillage (ou pixels), le nombre de points du quadrillage situés à l'intérieur de P et le nombre de points du quadrillage situés sur le bord de P .

Nous allons établir une jolie preuve de ce théorème.

1. * On considère trois points du quadrillage a , b et c tels que le triangle abc n'admet pas de points du quadrillage autres que a , b , c qui soient dans le triangle ou sur le bord du triangle (autrement dit $I(abc)=0$ et $B(abc)=3$). Un tel triangle est dit **élémentaire**.

Montrer que $S(abc)=1/2$.

2. On considère un polygone convexe P dont les sommets sont des points du quadrillage, montrer que l'on peut décomposer en triangles élémentaires à l'aide des points du quadrillage à l'intérieur de P et sur le bord de P .

En déduire le théorème de Pick en utilisant la formule d'Euler.

3. Que faire si P n'est pas convexe ?

Énumération **

Depuis Cayley 1889 nous savons qu'il y a n^{n-2} arbres différents sur n sommets.

Donner une preuve de cette formule en remarquant que si l'on distingue deux sommets par arbre cela fait n^n objets différents. Il suffit donc d'établir une bijection entre les fonctions de $1, \dots, n$ dans $1, \dots, n$ et ces arbres avec deux sommets distingués.

7.4 Juin 2000

Géométrie discrète

N.B. Les questions suivantes sont presque indépendantes.

1. On commence par une question facile :

Donner une interprétation géométrique (en termes de chemins et en utilisant le cours) de la formule classique :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

2. **

On considère maintenant un quadrillage $N \times N$ et les chemins allant du point O de coordonnées (0,0) au point M de coordonnées (a, b) a, b entiers.

Les chemins peuvent utiliser 3 directions E (horizontalement de la gauche vers la droite), N (verticalement du bas vers le haut) et D diagonale NE.

Quel est le nombre $L(a, b)$ de tels chemins contenus dans le sous-quadrillage défini par les points O et M ? On commencera par écrire une formule de récurrence. On peut utiliser la technique des séries génératrices ou donner une évaluation de $L(a, b)$.

3. On considère maintenant un robot qui se déplace dans ce rectangle, suivant de tels chemins, et l'on suppose que le rectangle est muni d'obstacles R_1, \dots, R_k ou zones interdites (aussi des rectangles).

Il s'agit alors de trouver un chemin minimal allant de O à M, évitant les obstacles, le coût d'un arc E ou N est de 1 alors que pour une diagonale il n'est que 1/2.

N.B. Les bords des obstacles sont utilisables, seul l'intérieur est interdit au robot.

Proposer un algorithme de recherche, préciser la modélisation choisie, évaluer votre algorithme.

4. * Un problème d'ordonnancement préemptif :

Il s'agit d'ordonner deux tâches T_1 et T_2 à l'aide de deux machines M_1 et M_2 . Chaque tâche se décompose en tâches unitaires qui doivent être exécutées dans l'ordre prescrit mais peuvent s'exécuter soit sur M_1 ou M_2 soit uniquement sur l'une des machines. L'ordonnancement est dit préemptif, parce que les tâches peuvent être interrompues et réalisées par morceau (les tâches unitaires), il suffit de respecter l'ordre imposé sur les tâches unitaires.

Ainsi par exemple :

$$T_1 = u_1^1, u_2^2, u_3^*$$

$$T_2 = v_1^1, v_2^1, v_3^*, v_4^1$$

(Notations utilisées : u_i^j représente la ième sous tâche qui doit s'exécuter sur la machine j si $j=1$ ou $j=2$ et si $j=*$ la sous tâche peut s'exécuter sur n'importe quelle machine).

Pour cet exemple un ordonnancement solution :

$$M_1 = u_1, v_1, u_3, v_2, -, v_4$$

$$M_2 = -, u_2, -, -, -, v_3$$

La durée de cet ordonnancement est de 4 unités pour M_1 et de 6 pour M_2 . Il y a 3 unités de temps inutilisées pour la machine M_2 .

Peut-on faire mieux, tout en respectant les contraintes ?

Dans le cas général, étant donnée une décomposition en tâches unitaires de T_1 et T_2 , écrire un algorithme qui calcule un ordonnancement optimal (i.e. qui minimise la durée d'utilisation des machines). Préciser la modélisation utilisée.

7.5 juin 2001

7.5.1 Première partie : Algorithmique

1. Facile pour commencer. On considère un échiquier 8x8, peut-on le recouvrir avec des dominos ? (recouvrement sans chevauchement des dominos).

Et avec des triminos (polyominos constitués de 3 pixels adjacents).

Dernière question du même genre, on considère maintenant un échiquier 8x8 tronqué de deux cases, celles qui forment les coins haut gauche et bas droite. Peut-on le recouvrir par des dominos ?

2. On considère deux ensembles de points du plan $S_1 = \{p_1, \dots, p_n\}$ et $S_2 = \{q_1, \dots, q_n\}$ du plan. Il s'agit d'écrire un algorithme de calcul de la distance entre ces deux ensembles.

$$d(S_1, S_2) = \max_{i,j} \{d(p_i, q_j)\}, \text{ pour } i, j = 1, \dots, n.$$

- (a) On note $Env(S)$ l'enveloppe convexe d'un ensemble de points. Montrer que $d(S_1, S_2) = d(Env(S_1), Env(S_2))$.

- (b) On pose $S = S_1 \cup S_2$, $diam(S)$, le diamètre de S , i.e. la distance maximale entre deux points de S .

Montrer que $d(S_1, S_2) \leq diam(S)$.

- (c) Ecrire un algorithme de calcul du diamètre d'un ensemble de points.

- (d) A-t-on toujours l'égalité : $d(S_1, S_2) = diam(S)$? (Piste : considérer quelques exemples).

- (e) Montrer que l'un des deux points réalisant $d(S_1, S_2)$ doit appartenir à $Env(S)$. Exhiber un exemple avec exactement un point de $Env(S)$.

- (f) En déduire un algorithme pour le calcul de $d(S_1, S_2)$. L'évaluer en fonction de n . Est-il optimal ? Avez-vous une idée pour une borne inférieure de complexité sur ce problème ?
 - (g) Peut-on écrire un algorithme plus efficace lorsque les ensembles S_1, S_2 sont des polygones simples (resp. polygones convexes) ?
 - (h) Que devient votre algorithme si les ensembles de points sont pris dans un espace à n dimensions $n \geq 3$?
3. Difficile. Etant donné un billard sur un carré unité et le parcours (parfait sans frottement, rebonds parfaits ...), tiré d'un coté avec un angle α .
Etablir une correspondance entre ce parcours et une droite discrète de pente α .

7.5.2 Deuxième partie : Enumération

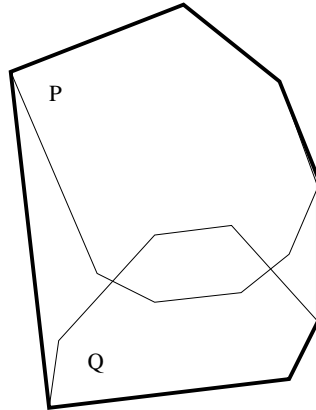
1. Un paradoxe pour la mise en place des 35 heures.
Dans une année de 365 jours, il y a 104 jours pour les week-ends, 17 pour les vacances. Parmi les jours restant $1/3$ de la journée soit 122 jours est consacré à dormir. Mais aussi un autre tiers de la journée est en dehors de nos 8 heures de travail journalières, soit encore 122 jours.
Et donc nous avons : $104+17+122+122 = 365$ jours sans travailler par an !!!
Expliquer ce paradoxe avec le principe d'inclusion-exclusion, au passage on donnera une preuve de la formule d'exclusion-inclusion.
2. Est-il possible dans un graphe simple, i.e. sans arête multiple, (resp. simple connexe) que les sommets aient tous des degrés différents ?
3. On considère un cercle et n points sur le cercle. On trace toutes les cordes induites par ces points. On fait l'hypothèse qu'aucun triplet de 3 cordes ne se rencontre en un point.
Quel est le nombre de regions engendrées par ces cordes ? (Piste : utiliser le théorème d'Euler).

7.6 juin 2002

7.6.1 Union de polygones convexes

On s'intéresse au problème suivant :

Données	P et Q 2 polygones convexes décrits par leur contour dans l'ordre inverse des aiguilles d'une montre
Résultat	$EC(P \cup Q)$ l'enveloppe convexe de P et Q



Vous avez étudié ce problème en cours dans le cas où P et Q sont disjoints. Il s'agit ici de le résoudre dans le cas général.

Pour faciliter l'écriture des algorithmes on supposera que tous les points sont distincts et qu'il n'y a pas 3 points alignés.

1. On suppose connu un point O situé à l'intérieur des 2 polygones P et Q . Comment obtenir un polygone étoilé dont les sommets sont ceux de P et de Q ? Donnez un algorithme calculant $EC(P \cup Q)$. Quelle est sa complexité?
(Vous pouvez faire référence à des algorithmes vus en cours. Dans ce cas il est inutile de les recopier.)
2. On suppose à présent que O est un point situé à l'intérieur du polygone P mais à l'extérieur du polygone Q .
Selon la terminologie utilisée en cours un sommet q_i de Q est «rouge» par rapport à O si celui-ci est à droite des segments $[q_{i-1}, q_i]$ et $[q_i, q_{i+1}]$.
Donnez un algorithme qui supprime tous les points «rouges» de Q par rapport au point O . Soit Q' le polygone obtenu. Comparez $EC(P \cup Q)$ et $EC(P \cup Q')$. En déduire un algorithme pour le calcul de $EC(P \cup Q)$. Quelle est sa complexité?
3. Déduire des 2 cas précédents un algorithme calculant $EC(P \cup Q)$. Quelle est sa complexité?

7.6.2 Géométrie discrète

N.B. Les questions suivantes sont presque indépendantes.

1. On commence par une question facile :

Donner une interprétation géométrique (en termes de chemins et en utilisant le cours) de la formule classique :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

2. **

On considère maintenant un quadrillage $N \times N$ et les chemins allant du point O de coordonnées (0,0) au point M de coordonnées (a, b) a, b entiers.

Les chemins peuvent utiliser 3 directions E (horizontalement de la gauche vers la droite), N (verticalement du bas vers le haut) et D diagonale NE.

Quel est le nombre $L(a, b)$ de tels chemins contenus dans le sous-quadrillage défini par les points O et M? On commencera par écrire une formule de récurrence. On peut utiliser la technique des séries génératrices ou donner une évaluation de $L(a, b)$.

3. On considère maintenant un robot qui se déplace dans ce rectangle, suivant de tels chemins, et l'on suppose que le rectangle est muni d'obstacles R_1, \dots, R_k ou zones interdites (aussi des rectangles).

Il s'agit alors de trouver un chemin minimal allant de O à M, évitant les obstacles, le coût d'un arc E ou N est de 1 alors que pour une diagonale il n'est que 1/2.

N.B. Les bords des obstacles sont utilisables, seul l'intérieur est interdit au robot.

Proposer un algorithme de recherche, préciser la modélisation choisie, évaluer votre algorithme.

4. * Un problème d'ordonnancement préemptif :

Il s'agit d'ordonner deux tâches T_1 et T_2 à l'aide de deux machines M_1 et M_2 . Chaque tâche se décompose en tâches unitaires qui doivent être exécutées dans l'ordre prescrit mais peuvent s'exécuter soit sur M_1 ou M_2 soit uniquement sur l'une des machines. L'ordonnancement est dit préemptif, parce que les tâches peuvent être interrompues et réalisées par morceau (les tâches unitaires), il suffit de respecter l'ordre imposé sur les tâches unitaires.

Ainsi par exemple :

$$T_1 = u_1^1, u_2^2, u_3^*$$

$$T_2 = v_1^1, v_2^1, v_3^*, v_4^1$$

(Notations utilisées : u_i^j représente la i ème sous tâche qui doit s'exécuter sur la machine j si $j=1$ ou $j=2$ et si $j=*$ la sous tâche peut s'exécuter sur n'importe quelle machine).

Pour cet exemple un ordonnancement solution :

$$M_1 = u_1, v_1, u_3, v_2,$$

$$M_2 = -, u_2, -, -, v_3, v_4$$

La durée de cet ordonnancement est de 4 unités pour M_1 et de 6 pour M_2 . Il y a 3 unités de temps inutilisées pour la machine M_2 .

Peut-on faire mieux, tout en respectant les contraintes ?

Dans le cas général, étant donnée une décomposition en tâches unitaires de T_1 et T_2 , écrire un algorithme qui calcule un ordonnancement optimal (i.e. qui minimise la durée d'utilisation des machines). Préciser la modélisation utilisée.

7.7 Mai 2003

7.7.1 Analyse d'image

1. Donnez un algorithme récursif de seuillage par hysteresis. Évaluez sa complexité. On rappelle que ce seuillage consiste à garder tous les points dont le niveau de gris est supérieur à un *seuil max*, à éliminer tous les points dont le niveau de gris est inférieur à un *seuil min*, et à garder les points dont le niveau de gris est supérieur au *seuil min* si et seulement si ceux-ci sont reliés par un chemin de points dont le niveau de gris est supérieur au *seuil min* à un point dont le niveau de gris est supérieur au seuil max.

7.7.2 Géométrie discrète

On considère un polygone simple P , dont les sommets sont situés sur un quadrillage régulier (points à coordonnées entières).

1. L'idée de cet exercice est le calcul d'un polygone convexe maximal inclus dans P . Quels sens peut-on donner au mot maximal? Montrer sur des exemples les différentes définitions possibles. La suite de l'exercice se fera sur la notion de surface maximale.
2. On supposera tout d'abord les côtés de P parallèles aux axes. Ecrire un algorithme qui calcule le rectangle de surface maximale inclus dans P .
3. Proposer un algorithme qui calcule le polygone Horizontalement-convexe de surface maximale inclus dans P .
4. Même question dans le cas où l'on cherche un polygone Horizontalement et Verticalement convexe de surface maximale inclus dans P .

5. Difficile. Maintenant nous ne supposons plus les côtés de P parallèles aux axes, proposer un algorithme qui calcule le polygone convexe de surface maximale inclus dans P .

7.8 mai 2005

7.8.1 Oreilles et triangulation

Commençons par quelques définitions. Soit $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ un polygone simple. Soient p_i et p_j 2 sommets non adjacents de P . Le segment $[p_i, p_j]$ est une **diagonale** de P s'il est entièrement à l'intérieur de P (les seules intersections entre $[p_i, p_j]$ et le contour de P sont p_i et p_j).

Un **sommet principal** de P est un sommet p_i de P tel que le segment formé par ses 2 voisins $[p_{i-1}, p_{i+1}]$ est une diagonale de P . Le triangle (p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) est appelé une **oreille** de P .

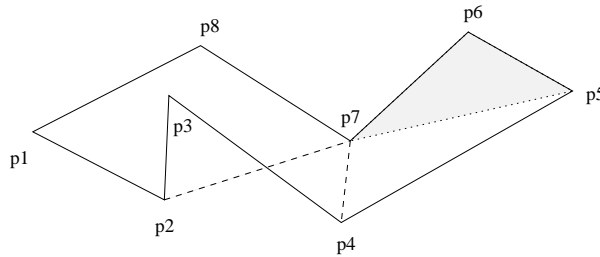


FIG. 7.1 – Polygone à 3 oreilles : $[p_4, p_7]$ est une diagonale ; $[p_2, p_7]$ n'est pas une diagonale ; Les 3 sommets principaux sont p_2, p_5, p_6 ; (p_5, p_6, p_7) est une oreille.

1. Combien d'oreilles possède un polygone convexe de $n > 3$ sommets ?
2. Soit P un polygone simple, T une triangulation de P et G le graphe d'adjacence associé à T (graphe dual de T). Á quel type de sommet de G correspondent les oreilles de P ? En déduire le *théorème des 2 oreilles* : « Tout polygone simple possède au moins 2 oreilles ».
3. Donnez un algorithme qui étant donné un polygone simple P et un sommet p de P vérifie si p est un sommet principal de P . En déduire un algorithme pour `sommetPrincipal`. Quelle est sa complexité ?
4. En utilisant `sommetPrincipal`, écrivez un algorithme `triangulation`, calculant une triangulation d'un polygone simple. Quelle est sa complexité ?

Algorithme : `sommetPrincipal(P)`

Données : P un polygone simple

Résultat : Renvoie un sommet principal de P

5. Nous admettrons les résultats suivants :

Dans un polygone simple, tout sommet qui n'est pas principal admet une diagonale. De plus il existe un algorithme linéaire dans la taille du polygone calculant cette diagonale.

Algorithme : `calculDiagonale(P, pi)`

Données : P un polygone simple, p_i un sommet non principal de P

Résultat : Renvoie un sommet p_j , tel que $[p_i, p_j]$ est une diagonale de P

On suppose que l'on dispose d'un algorithme linéaire pour `calculDiagonale`. En utilisant `calculDiagonale` écrivez un nouvel algorithme `sommetPrincipal` qui procède par dichotomie. Calculez soigneusement sa complexité. Quelle est alors la complexité de votre algorithme `triangulation` ?

7.8.2 Droites discrètes

1. Donner deux définitions des droites discrètes et montrer leur équivalence.
2. Un mot ω infini sur un alphabet binaire est appelé mot Sturmien si pour tout entier $n \geq 1$, ω a exactement $n + 1$ facteurs différents de taille n .
Montrer que le code d'une droite discrète infinie du premier cadran fournit un mot sturmien.
Que dire de la réciproque ?
3. Proposer une définition de droites et plans discrets dans l'espace.

7.8.3 Traitement d'images

1. Qu'est-ce une image numérique ? Comment est-elle obtenue ?
2. Qu'est-ce la norme du gradient d'une image ? Que fait apparaître un opérateur de dérivation sur une image ?
3. Qu'est-ce une image couleur ? Pourquoi une image couleur prend plus de place mémoire qu'une image à niveau de gris ? Comment est codée la couleur ?
4. Qu'est-ce que l'espace perceptuel de représentation des couleurs ?
5. En quoi consiste une opération de division/fusion ? À quoi cela sert-il ?

[]