

Un tri spécial

Michel Habib
Magistère Cachan 2011–2012

23 décembre 2011

Plan

- 1 Tri par retournements
- 2 Problèmes de même nature

Algorithmes

Définition

Ensemble de règles opératoires dont l'application permet de résoudre un problème au moyen d'un nombre fini d'opérations.

Origine de ce mot

Abu Ja'far Mohamed Ibn Al-Khowarizmi
(Père de Ja'far, fils de Mohamed, né à Khowarizimi)
Mathématicien persan IX ème siècle qui a écrit le premier recueil d'algorithmes.

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Données: σ une permutation de $[1, n]$

Résultat: une permutation σ' telle que $\sigma'(1) = 1$

tant que $\sigma(1) \neq 1$ **faire**

└ Renverser l'ordre des $\sigma(1)$ premiers éléments

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Considérons σ une permutation de $[1,7]$

- 6 3 1 7 2 5 4
- 5 2 7 1 3 6 4
- 3 1 7 2 5 6 4
- 7 1 3 2 5 6 4
- 4 6 5 2 3 1 7
- 2 5 6 4 3 1 7
- 5 2 6 4 3 1 7
- 3 4 6 2 5 1 7
- 6 4 3 2 5 1 7
- 1 5 2 3 4 6 7 OUF!

À vous de faire sur la permutation :

3 1 5 7 4 6 2

Combien de retournements ?

Conséquences :

Cela doit toujours s'arrêter !!

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Terminaison

On peut montrer que l'algorithme précédent termine en un nombre fini d'étapes.

Ebauche de preuve

- 6 3 1 7 2 5 4
- 0 0 0 0 0 0 0
- 5 2 7 1 3 6 4
- 0 1 0 0 0 1 0
- 3 1 7 2 5 6 4
- 0 0 0 0 1 1 0
- 7 1 3 2 5 6 4
- 0 0 1 0 1 1 0
- 4 6 5 2 3 1 7
- 0 0 0 0 0 0 1 ...

Complexité

On peut borner par $O(2^n)$ on considérant que l'on va de

0 0 0 0 0 0 0

à

1 1 1 1 1 1 1 de manière strictement monotone suivant un ordre
lexicographique

Conjecture de Chvátal

L'algorithme est en $O(n^2)$?

Des exemples difficiles :

6 2 1 10 11 8 12 3 4 7 9 5
nécessite 172 retournements

2 8 11 12 4 1 10 9 3 6 7 5
nécessite 171 retournements

Les plus mauvais cas avec 12 éléments

Moralité

- Il n'est pas si facile d'analyser la complexité (le comportement) d'un algorithme possédant une seule instruction.
- Ces opérations de retournement interviennent **dans la nature** sur les génomes et sont très étudiées en bioinformatique (tri par inversion de permutations).

Tout ce que l'on sait à ce jour

- Il existe un exemple en $O(n^2)$
- En moyenne c'est $O(n)$

Un outil pour les schémas logarithmiques

Nom : Inférieur à la demi-somme

Données : une liste de n entiers a_1, \dots, a_n positifs ou nuls

Résultats : i tel que $a_i \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j$