# Des couplages aux flots

Michel Habib

M1 Algo Avancé 2012

9 mai 2012

# Plan

1. Rappels sur matroïdes
2. Couplages et matroïdes
3. Rappels sur les flots maximum

1. Rappels sur matroïdes
2. Couplages et matroïdes
3. Rappels sur les flots maximum

# Une définition de matroïdes par ses indépendants

$M = (X, \mathcal{I})$ est un matroïde :
un ensemble fini $X$, $\mathcal{I}$ une famille de parties de $X$ qui vérifie :

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$

# Une définition de matroïdes par ses indépendants

$M = (X, \mathcal{I})$ est un matroïde :
un ensemble fini $X$, $\mathcal{I}$ une famille de parties de $X$ qui vérifie :

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. Si $I \in \mathcal{I}$ alors $\forall J \subseteq I$, $J \in \mathcal{I}$

# Une définition de matroïdes par ses indépendants

$M = (X, \mathcal{I})$ est un matroïde :
un ensemble fini $X$, $\mathcal{I}$ une famille de parties de $X$ qui vérifie :

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. Si $I \in \mathcal{I}$ alors $\forall J \subseteq I$, $J \in \mathcal{I}$
3. Si $I, J \in \mathcal{I}$ et $|I| = |J| + 1$ alors $\exists x \in I$-$J$ tel que : $J \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

# Fonction de rang d'un matroïde

Au matroïde $M = (E, \mathcal{I})$ on associe la fonction de rang :
$r_M : \mathcal{P}\ (E) \rightarrow \mathcal{N}$ telle que :
$\forall A \subseteq E$, $r_M(A) = max\{|I|$ avec $I \in \mathcal{I}$ et $I \subseteq A\}$
Cette fonction est bien définie car :
$M(A) = (A, \mathcal{J})$ avec $\mathcal{J} = \{\mathcal{I} \cap \mathcal{A} | \mathcal{I} \in \mathcal{I}\}$ est aussi un matroïde et
$r_M(A)$ est égal au cardinal d'une base de ce matroïde.

# Matroïde dual d'un matroïde

Au matroïde $M = (E, \mathcal{I})$ on associe le matroïde dual $M^* = (E, \mathcal{C}^*)$
$\forall A \subseteq E$, $r^*(A) = |A| + r(E\text{-}A) - r(E)$
$B$ est une base de $M$ ssi $E$-$B$ est une base de $M^*$.

1. Rappels sur matroïdes
2. Couplages et matroïdes
3. Rappels sur les flots maximum

## Couplages dans les graphes bipartis

Pour un graphe biparti $G = (X, Y, E)$,
$C \subseteq E$ est un couplage de cardinal maximum ss'il n'existe pas de chaîne alternée impaire joignant deux sommets insaturés pour $C$.

### Couplages dans les graphes bipartis

Pour un graphe biparti $G = (X, Y, E)$,
$C \subseteq E$ est un couplage de cardinal maximum ss'il n'existe pas de chaîne alternée impaire joignant deux sommets insaturés pour $C$.

### Aspects matroïdaux

$M = (E, \mathcal{C})$ avec $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}$ couplage de $G\}$ est l'ensemble des indépendants communs à deux matroïdes . Les indépendants de taille maximum étant les couplages de cardinal maximum.

# Un très intéressant théorème Min-Max

**Théorème Edmonds 1970**

Soient $M_1 = (E, \mathcal{I})$ et $M_2 = (E, \mathcal{J})$ deux matroïdes sur $E$ ayant pour fonction de rang $r_1, r_2$,
alors la taille maximum d'un indépendant commun aux deux matroïdes est :
$min_{A \subseteq E}(r_1(A) + r_2(E\text{-}A))$

# Un très intéressant théorème Min-Max

## Théorème Edmonds 1970

Soient $M_1 = (E, \mathcal{I})$ et $M_2 = (E, \mathcal{J})$ deux matroïdes sur $E$ ayant pour fonction de rang $r_1, r_2$,
alors la taille maximum d'un indépendant commun aux deux matroïdes est :
$min_{A \subseteq E}(r_1(A) + r_2(E\text{-}A))$

## Preuve :

Soit $I \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$,
$\forall A \subseteq E$, $|I| = |A \cap I| + |I - A| \leq r_1(A) + r_2(E\text{-}A)$
L'autre inégalité se montre soit par induction, soit algorithmiquement.

# Algorithme pour l'intersection de deux matroïdes

Soient $M_1 = (E, \mathcal{I})$ et $M_2 = (E, \mathcal{J})$ deux matroïdes sur $E$
Soit $I \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, on construit un graphe orienté $G_{M_1 M_2}(I)$ sur $E$ tel que :
$\forall y \in I$, and $\forall x \in E$-$I$
$yx$ arc ssi $I - y + x \in \mathcal{I}$
$xy$ arc ssi $I - y + x \in \mathcal{J}$
$X_1 = \{x \in E - I | I + x \in \mathcal{I}\}$
$X_2 = \{x \in E - I | I + x \in \mathcal{J}\}$

### Propriété

$I$ est de taille maximum ss'il n'existe pas de chemin de $X_1$ à $X_2$ dans $G$.

## Propriété

$I$ est de taille maximum ss'il n'existe pas de chemin de $X_1$ à $X_2$ dans $G$.

## Preuve

S'il existe $a \in X_1 \cap X_2$, alors $I \cup \{a\} \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. On peut donc supposer $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.
S'il existe un chemin $[x, y, z]$ de longueur 2, allant de $X_1$ à $X_2$, nous avons en suivant ce chemin :
$I + x \in \mathcal{I}$ et $I + x - y \in \mathcal{J}$ puis $I + z - y \in \mathcal{I}$ et enfin $I + z \in \mathcal{J}$.
D'après $I + x \in \mathcal{I}$ et $I + z - y \in \mathcal{I}$ par l'axiome des indépendants nous avons $I + x + z - y \in \mathcal{I}$.
D'après $I + z \in \mathcal{J}$ et $I + x - y \in \mathcal{J}$ par l'axiome des indépendants nous avons $I + x + z - y \in \mathcal{J}$.
Donc $I$ n'était pas de taille maximum, car $I + x + z - y \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$

Si le chemin n'est pas de longueur 2, il est nécessairement de longueur paire (vu la définition des arcs du graphe) et le raisonnement ci-dessus se généralise simplement.
Dans l'autre sens, s'il n'existe pas de chemin de $X_1$ à $X_2$ dans $G$, on considère un ensemble $A$ contenant $X_2$ vérifiant $A \cap X_1 = \emptyset$ et tel qu'il existe aucun arc entrant dans $A$ (il existe nécessairement un tel ensemble $A$).
Montrons $r_1(A) \leq |I \cap A|$. Sinon, il existe (cf. axiome sur les indépendants) $x \in A - I$ tel que $I \cap A + x \in \mathcal{I}$.
Cependant $I + x \notin \mathcal{I}$, car $A \cap X_1 = \emptyset$. Comme $I \cap A + x$ est nécessairement inclus dans un indépendant de taille max sur l'ensemble $I + x$, il existe donc $y \in I - A$ tel que $I - y + x \in \mathcal{I}$, ce qui est impossible car alors il existerait un arc entrant en $A$.

De même on obtient $r_2(E - A) \leq |I - A|$ .
Ainsi $I$ est donc optimal.
En fait cela fournit aussi une preuve algorithmique de l'autre inégalité de théorème d'Edmonds.

# Limites sur les couplages

**Couplage Maximum pour l'inclusion et de cardinal minimum**

La recherche d'un tel couplage est un problème NP-difficile.

# Limites sur les couplages

**Couplage Maximum pour l'inclusion et de cardinal minimum**

La recherche d'un tel couplage est un problème NP-difficile.

**Dénombrement**

Trouver le nombre de couplages parfaits d'un graphe biparti est #P-complet.

1. Rappels sur matroïdes
2. Couplages et matroïdes
3. Rappels sur les flots maximum

# Définitions

On considère un graphe orienté $G = (X, U)$, deux sommets $s, t \in X$. Les arcs sont munis de capacités.
$c : U \rightarrow R+$
un flot sur $G$ est un vecteur indexé par $U$ (donc de taille $m$) qui vérifie :
$\forall xy \in U,\ 0 \leq \phi(x, y) \leq c(u)$.
$\forall x \in X,\ \Sigma_{yx\ entrant\ en\ x}\phi(x, y) = \Sigma_{xz\ sortant\ de\ x}\phi(x, z)$
Lois de Kirchoff de conservation aux sommets.
Etant donné deux sommets particuliers $s, t$ de $G$, on cherche un flot qui maximise le flot sur l'arc $ts$.

On considère un graphe orienté $G = (X, U)$, deux sommets $s, t \in X$. Les arcs sont munis de capacités.
$c : U \rightarrow R+$

**Prototype de théorème Min-Max**

La valeur minimale d'une coupe séparant $s$ et $t$ est égale à la valeur du flot maximum entre $s$ et $t$ dans $G$

# Recherche d'une chaîne améliorante

**RechercheChaîne**$(G, \phi)$;

**Données**: un graphe orienté $G = (X, U)$, une fonction de capacité $c : U \rightarrow R+$, deux sommets $s, t \in X$, un flot $\phi \geq 0$

**Résultat**: soit une chaîne améliorante de $s$ à $t$, soit la maximalité de $\phi$

$OUVERTS \leftarrow \{s\}$ ; $FERMES \leftarrow \emptyset$;

**tant que** $OUVERTS \neq \emptyset$ **faire**

- $x \leftarrow Choix(OUVERTS)$;
- Explorer(x);
- $Ajout(x, FERMES)$ ;
- $Retrait(z, OUVERTS)$ ;

"Le flot $\phi$ est maximum" ;

**Explorer(x)**;

**pour** *Tous les successeurs y de x* **faire**

    **si** $y \notin FERMES \cup OUVERTS$ *et* $\phi(xy) < c(yx)$ **alors**

        **si** $y = t$ **alors**

            STOP : Réponse VRAI "On a trouvé une chaîne améliorante de $s$ à $t$"

        **sinon**

            Ajout(y, OUVERTS)

**pour** *Tous les prédécesseurs y de x* **faire**

    **si** $y \notin FERMES \cup OUVERTS$ *et* $\phi(yx) > 0$ **alors**

        **si** $y = t$ **alors**

            STOP : Réponse Vrai "On a trouvé une chaîne améliorante de $s$ à $t$"

        **sinon**

            Ajout(y, OUVERTS)

# Algorithme de Ford-Fulkerson

Afin de calculer un flot maximum dans un graphe, on peut appliquer la procédure suivante :

$\phi \rightarrow 0$ ;
**tant que** *RechercheChaîne*$(G, \phi)$=*Vrai* **faire**
    Améliorer le flot sur la chaîne ;
    mise à jour de $\phi$ ;

Une coupe $S$ est un sous-ensemble de sommets du graphe tel que $s \in S$ et $t \notin S$. La capacité $c(S)$ d'une coupe est la somme des capacités des arcs sortants de $S$.

**Lemme**

Pour tout flot $\phi$ et toute coupe $S$ :
$\phi(t,s) + \Sigma_{xy \neq ts \text{ entrant en } S}\phi(x,y) = \Sigma_{ab \text{ sortant de } S}\phi(a,b) \leq c(S)$
d'où $\phi(t,s) \leq c(S)$.

Une coupe $S$ est un sous-ensemble de sommets du graphe tel que $s \in S$ et $t \notin S$. La capacité $c(S)$ d'une coupe est la somme des capacités des arcs sortants de $S$.

**Lemme**

Pour tout flot $\phi$ et toute coupe $S$ :
$\phi(t,s) + \Sigma_{xy \neq ts \ entrant \ en \ S} \phi(x,y) = \Sigma_{ab \ sortant \ de \ S} \phi(a,b) \leq c(S)$
d'où $\phi(t,s) \leq c(S)$.

**corollaire**

Si l'on trouve un flot $\phi$ et une coupe $S$ tels que $\phi(t,s) = c(S)$, ils sont optimaux.

# Fin de la preuve du Théorème FF

## Preuve

Il est facile de vérifier que chaque chaîne améliorante permet de construire à partir de $\phi$ un nouveau flot $\phi'$ : qui vérifie $\phi(t,s) < \phi'(t,s)$.
Lorsqu'il n'existe plus de chaîne améliorante pour un flot $\phi$, soit $S$ l'ensemble des sommets explorés à partir de $s$. Nécessairement (vu la procédure d'exploration) les arcs rentrant en $S$ on un flot nul et les arcs sortants sont saturés (valeur de flot $=$ capacité de l'arc).
L'inégalité du lemme est donc une égalité et le flot est donc bien optimum.

**corollaire**

A partir d'un flot maximum, on peut calculer en $O(m)$ une coupe minimale.

### corollaire

A partir d'un flot maximum, on peut calculer en $O(m)$ une coupe minimale.

### corollaire

Si les capacités sont entières l'algorithme de FF converge vers une solution entière.

**corollaire**

A partir d'un flot maximum, on peut calculer en $O(m)$ une coupe minimale.

**corollaire**

Si les capacités sont entières l'algorithme de FF converge vers une solution entière.

**Remarque**

Sans information supplémentaire sur le parcours de graphe utilisé, l'algorithme de FF n'est pas polynomial.

# Graphe des écarts ou graphe résiduel

Pour un flot $\phi$ donné, on construit un graphe $G_\phi = (X, V)$ muni d'une valuation $\omega : V \rightarrow R+$ comme suit :
si $xy \in U$ alors :

- si $\phi(x, y) < c(x, y)$ alors $xy \in V$ et $w(x, y) = c(x, y) - \phi(x, y)$

## Graphe des écarts ou graphe résiduel

Pour un flot $\phi$ donné, on construit un graphe $G_\phi = (X, V)$ muni d'une valuation $\omega : V \to R+$ comme suit :
si $xy \in U$ alors :

- si $\phi(x, y) < c(x, y)$ alors $xy \in V$ et $w(x, y) = c(x, y) - \phi(x, y)$
- si $\phi(x, y) > 0$ alors $yx \in V$ et $w(y, x) = \phi(x, y)$

# Graphe des écarts ou graphe résiduel

Pour un flot $\phi$ donné, on construit un graphe $G_\phi = (X, V)$ muni d'une valuation $\omega : V \to R+$ comme suit :
si $xy \in U$ alors :

- si $\phi(x, y) < c(x, y)$ alors $xy \in V$ et $w(x, y) = c(x, y) - \phi(x, y)$
- si $\phi(x, y) > 0$ alors $yx \in V$ et $w(y, x) = \phi(x, y)$

**Propriété**

Il existe un chemin de $s$ à $t$ dans $G_\phi$ ss'il existe une chaîne améliorante dans $G$ pour $\phi$

Nous sommes donc ramenés à un problème d'existence de chemin dans un graphe.
On peut calculer :

1. Un plus court en nombre d'arcs

Nous sommes donc ramenés à un problème d'existence de chemin dans un graphe.
On peut calculer :

1. Un plus court en nombre d'arcs
2. Celui qui augmente le plus le flot

Nous sommes donc ramenés à un problème d'existence de chemin dans un graphe.
On peut calculer :

1. Un plus court en nombre d'arcs
2. Celui qui augmente le plus le flot
3. ...

# Un algorithme polynomial simple

Soit $\Delta$ la puissance de 2 maximale telle que $\Delta \leq max_{sx \in U}(c(s,x))$. On notera $G_\phi(\Delta)$ le graphe partiel résiduel, constitué des arcs de capacités $\geq \Delta$.

```
φ ← 0 ;
tant que Δ ≥ 1 faire
    tant que il existe un chemin de s à t dans G_φ(Δ) faire
        améliorer φ;
        Mise à jour de G_φ(Δ)
    Δ ← Δ/2
```

**Théorème**

L'algorithme précédent calcul un flot maximum entre $s$ et $t$ en $O(m^2 log_2 C)$, avec $C$ la capacité maximale d'un arc sortant de $s$.

1. Le nombre de passages dans la première boucle Tant que est borné par $log_2 C$.

1. Le nombre de passages dans la première boucle Tant que est borné par $log_2 C$.
2. Chaque chemin trouvé dans $G_\phi(\Delta)$ permet d'augmenter le flot d'au moins $\Delta$.

1. Le nombre de passages dans la première boucle Tant que est borné par $log_2 C$.
2. Chaque chemin trouvé dans $G_\phi(\Delta)$ permet d'augmenter le flot d'au moins $\Delta$.
3. A la fin de la 2ème boucle Tant que pour une valeur de $\Delta$.
   Reprenons l'égalité du lemme sur la dernière coupe :
   $\phi(t, s) = \Sigma_{ab\ sortant\ de\ S} \phi(a, b) \leq$
   $c(S) - \Sigma_{xy \neq ts\ entrant\ en\ S} \phi(x, y)$
   Vu le marquage :
   $\phi(t, s) \geq c(S) - \Sigma_{ab\ sortant\ de\ S} \Delta - \Sigma_{xy \neq ts\ entrant\ en\ S} \Delta$
   d'où $\phi(t, s) \geq c(S) - m\Delta$ (majoration grossière), ou encore $c(S) \leq \phi(t, s) + m\Delta$.

1. Le nombre de passages dans la première boucle Tant que est borné par $log_2 C$.
2. Chaque chemin trouvé dans $G_\phi(\Delta)$ permet d'augmenter le flot d'au moins $\Delta$.
3. A la fin de la 2ème boucle Tant que pour une valeur de $\Delta$. Reprenons l'égalité du lemme sur la dernière coupe :
   $\phi(t,s) = \Sigma_{ab \ sortant \ de \ S}\phi(a,b) \leq$
   $c(S) - \Sigma_{xy \neq ts \ entrant \ en \ S}\phi(x,y)$
   Vu le marquage :
   $\phi(t,s) \geq c(S) - \Sigma_{ab \ sortant \ de \ S}\Delta - \Sigma_{xy \neq ts \ entrant \ en \ S}\Delta$
   d'où $\phi(t,s) \geq c(S) - m\Delta$ (majoration grossière), ou encore $c(S) \leq \phi(t,s) + m\Delta$.
4. Soit $\phi_p(t,s)$ la valeur du flot obtenu à l'étape $\Delta$.
   $\phi^*(t,s) \leq c(S) \leq \phi(t,s) + m\Delta$.
   Donc à la phase suivante avec la valeur $\Delta/2$, le flot ne peut donc augmenter que de $m\Delta$, et il y a au plus $2m$ améliorations du flot, à l'étape $\Delta/2$.

Chaque amélioration nécessite un parcours en $O(m)$, d'où le résultat :
$O(m^2 log_2 C)$.
Notons que cet algorithme est polynomial.

## Théorème

Tout flot se décompose comme une somme de chemins positifs de $s$ à $t$.

1. Capacités sur les noeuds (on se ramène à un problème de flot en dédoublant les sommets).

**Théorème**

Tout flot se décompose comme une somme de chemins positifs de $s$ à $t$.

1. Capacités sur les noeuds (on se ramène à un problème de flot en dédoublant les sommets).
2. Théorèmes de Menger (conséquences directes du théorème de Ford-Fulkerson)

### Théorème

Tout flot se décompose comme une somme de chemins positifs de $s$ à $t$.

1. Capacités sur les noeuds (on se ramène à un problème de flot en dédoublant les sommets).
2. Théorèmes de Menger (conséquences directes du théorème de Ford-Fulkerson)
3. Flots compatibles (on peut se ramener à un problème de flot maximum, dans un graphe construit à partir du premier).

### Propriété

La capacité d'une coupe est une fonction submodulaire :
$\forall A, B \subseteq X - \{t\}$ with $s \in A \cap B$
$c(A) + c(B) \geq c(A \cap B) + c(A \cup B)$

## Propriété

La capacité d'une coupe est une fonction submodulaire :
$\forall A, B \subseteq X - \{t\}$ with $s \in A \cap B$
$c(A) + c(B) \geq c(A \cap B) + c(A \cup B)$

## Preuve

Une étude exhaustive de tous les cas possibles montre que la seule différence provient des capacités des arcs de $B - A$ vers $A - B$ ainsi que celles des arcs allant $A - B$ vers $B - A$.
Ces capacités sont présentes dans le terme de gauche, les capacités étant positives ou nulles, d'où la conclusion.