

Flots

Michel Habib
M1 Algo Avancé 2011

5 avril 2012

Plan

- 1 Dualité flots-tensions
- 2 Ford-Fulkerson polynomial
- 3 Préflots

Considérons une fonction $t : X \rightarrow R_+$.

Ceci nous permet de définir pour un vecteur ψ_t de R^m comme suit :

$$\forall xy \in U, \psi_t(xy) = t(y) - t(x)$$

Théorème

$\forall t$ and $\forall \phi$ flot sur G , nous avons : $\psi_t \cdot {}^t\phi = 0$

Preuve

$\forall t$ and $\forall \phi$ flot sur G , nous avons :

$$\psi_t \cdot {}^t\phi = \sum_{xy \in U} \phi(xy) \cdot (t(y) - t(x))$$

Si A est la matrice d'incidence sommets-arcs, il suffit de remarquer que :

$$\psi_t \cdot {}^t\phi = T \cdot A \cdot {}^t\phi \text{ où } T \text{ est le vecteur à } n \text{ composantes tel que } T_i = t(x_i)$$

Et comme $A \cdot {}^t\phi = 0$, ceci donne le résultat.

Application

G le réseau routier de France, ϕ le flot des véhicules circulant à un instant ϵ

t la fonction de température au même instant en chaque sommet du réseau.

$$\forall \epsilon \psi_t \cdot {}^t \phi = 0$$

Certificats pour un flot ϕ

- Vérification des conservations aux nœuds : $O(n + m)$
- Vérification de la maximalité de $\phi(s, t)$:
À l'aide du calcul d'une coupe minimale.
On peut procéder à un parcours sur (G, ϕ) en $O(n + m)$

Certificats pour une coupe minimale S

Il faudrait calculer un flot maximum, ce qui ne se fait pas en un simple parcours !

Malgré le théorème de Ford-Fulkerson flot max et coupe min ne sont pas algorithmiquement équivalents.

Pour le calcul d'un flot max :

- 1 Algorithme avec seuil décroissants en $O(m^2 \log_2 C)$.
- 2 Ford-Fulkerson + plus courtes chaînes améliorantes en $O(m^2 n)$.

Lemme 1

Soit $D = (X, U)$ un **multigraphe** orienté vérifiant :

- 1 $\forall x \neq s, t \quad d^-(x) = d^+(x)$
- 2 $d^+(s) - d^-(s) = k > 0$

Alors D contient k chemins arc-disjoints de s à t .

Remarque

Pas de condition sur les degrés de t , ni sur la connexité !

Preuve

On construit un chemin en partant de s en suivant les arcs de D aléatoirement, mais en ne prenant un arc qu'une fois. Ce chemin peut passer au plus $d^-(s)$ fois en s , mais à chaque fois il peut ressortir en utilisant un arc non déjà parcouru.

Comme le graphe est fini et que l'on est jamais bloqué en un sommet nécessairement le chemin s'arrête en t .

On vire ce chemin et l'on procède par induction sur k .

Remarque

Le lemme est faux pour un graphe infini, il suffit de considérer un graphe constitué de 3 chemins infinis issus de s .

Lemme 2

Considérons une suite de flots f_1, \dots telle que f_{i+1} s'obtient à partir de f_i en augmentant sur une chaîne améliorante de longueur minimale P_i , alors :

- 1 $\forall k, |P_k| \leq |P_{k+1}|$
- 2 $|P_k| + 2 \leq |P_l|, \forall l > k$ tel que $P_k \cup P_l$ contienne une paire d'arcs inverses

Preuve

On considère le graphe D construit sur $P_k \cup P_{k+1}$ en orientant les arcs de s vers t et en ôtant les arcs utilisés dans les deux sens (par contre D peut contenir des arcs parallèles).

D est construit à partir d'arcs du graphe G initial. On peut appliquer le lemme 1 précédent sur D avec $k = 2$. Il existe donc deux chemins arc-disjoints Q_1 et Q_2 allant de s à t , qui sont aussi des f_k chaines améliorantes.

Par définition : $|P_k| \leq |Q_1|$ et $|P_k| \leq |Q_2|$.

Donc $2|P_k| \leq |Q_1| + |Q_2| \leq |P_k| + |P_{k+1}|$

D'où $|P_k| \leq |P_{k+1}|$.

Preuve (suite)

Pour la deuxième partie du lemme, il suffit de considérer deux chaînes ayant deux arcs inverses et d'appliquer le même raisonnement en remarquant que l'on gagne 2 dans les inégalités.

Théorème

L'algorithme de Ford-Fulkerson calcule un flot maximum en $O(m^2n)$

Preuve

Chaque chaîne améliorante sature (resp. met à 0) au moins un arc. Appelons cet arc goulot d'étranglement. Un arc de G est goulot d'étranglement au plus $n/2$ fois (cf. lemme 2.2).

Il y a donc au plus $m.n/2$ chaînes améliorantes.

Si on utilise un BFS pour les calculer, la complexité de l'algorithme est $O(m^2n)$.

Le point faible des algorithmes précédents reste les recherches successives de chaînes améliorantes.
Afin d'y pallier, les algorithmes de préflots ont été proposés.

Notion de préflot

On définit pour chaque $f \in R^m$:

- $\forall x \in X, f_{in}(x) = \sum_{yx \in E} f(yx)$
- $\forall x \in X, f_{out}(x) = \sum_{xz \in E} f(xz)$
- $exces(x) = f_{in}(x) - f_{out}(x)$

Définition

Un préflot sur $G = (X, U)$ avec deux sommets s, t .
 $f \in R^m$ tel que :

$$\forall u \in U, 0 \leq f(u) \leq c(u)$$

$$\forall x \neq s, exces(x) \geq 0.$$

Remarque : si pour un préflot f , $\forall x \neq s, t, exces(x) = 0$ alors f est un flot.

Encore des notations

$$\delta^+(x) = \{xy \in U\}$$

Un sommet x tel que $\text{exces}(x) > 0$ est appelé **actif**

un étiquetage de distance pour un flot f est une fonction :

$\psi : X \rightarrow \mathbb{N}$, telle que $\psi(t) = 0$, $\psi(s) = n$, et $\forall xy \in G_f$,

$$\psi(x) \leq \psi(y) + 1.$$

et pour

Data: un graphe $G = (X, U, s, t)$;

Result: Un flot de valeur max f compatible avec G ;

1 $a(s) = n$ **foreach** $x \in X \setminus \{s\}$ **do**

2 $a(x) = 0$

3 **foreach** $u \in \delta^+(s)$ **do**

4 $f(u) = c(u)$

5 **foreach** $u \notin \delta^+(s)$ **do**

6 $f(u) = 0$

7 **while** $\exists x \in X$ avec $\text{exces}(x) > 0$ **do**

8 Choisir $x \in X - \{s, t\}$ tq $\text{exces}(x) > 0$ et $a(x)$ est maximale
 parmi les sommets actifs **if** $\exists y \in X$, tq $xy \in U_f$ avec
 $a(y) < a(x)$ **then**

9 $\text{push}(x, y)$

10 **else**

11 $\text{relabel}(x)$

- 1 **push**(x, y) :
- 2 **if** xy est un arc retour de G_f ;
- 3 **then**
- 4 $\delta = \min(f(xy), \text{exces}(x));$
- 5 $f(xy) \leftarrow f(xy) - \delta;$
- 6 **else**
- 7 $\delta = \min(c(xy) - f(x, y), \text{exces}(x));$
- 8 $f(xy) \leftarrow f(xy) + \delta;$
- 9 Mettre à jour : $\text{exces}(x)$, $\text{exces}(y)$, le graphe des écarts
 $G_f = (X, U_f)$;
- 1 **relabel** (x) : $a(x) \leftarrow a(x) + 1$

Lemme

Si a est un étiquetage de distance pour f , il n'existe pas de chemin de s à t dans le graphe résiduel G_f .

Preuve

Considérons un chemin de s à t de longueur $k < n$. En considérant la fonction a le long du chemin on arrive à une contradiction :
 $a(t) \geq n - k$.

Invariant : f est un préflot sur G et a est un étiquetage de distance pour f .

Si l'algorithme s'arrête, il n'y a plus de sommet strictement en excès et nous avons donc un flot et vu le lemme précédent, nous avons un flot maximum.

Complexité

- 1 Si $\text{exces}(x) > 0$, il existe un chemin de s à x .
- 2 $\forall x \in X, a(x) \leq 2n - 1$
- 3 Chaque sommet est renuméroté au plus $2n - 1$ fois. Donc en tout au plus $2n^2$.
- 4 Le nombre de push opérations qui sature un arc est au plus de $2nm$
- 5 les autres push sont au plus en nombre $2n^2m$

L'algorithme des préflots nécessite $O(n^2m)$.
On peut améliorer Goldberg, Tarjan (1988) en $O(n^2m^{1/2})$
Toutefois les bornes de complexité des algorithmes de flots que nous avons prouvées dans ce cours sont un peu grossières.