

Quelques algorithmes simples à l'analyse compliquée

Michel Habib
M1 Algo Avancé 2011

10 mars 2011

Plan

- 1 Tri par retournements
- 2 Généralisations
- 3 Les fonctions de Collatz
- 4 La fonction très récursive Tak
- 5 Arbres recouvrants

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Données: σ une permutation de $[1, n]$

Résultat: une permutation σ' telle que $\sigma'(1) = 1$

- 1 **tant que** $\sigma(1) \neq 1$ **faire**
- 2 └ Renverser l'ordre des $\sigma(1)$ premiers éléments

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Considérons σ une permutation de $[1,7]$

- 6 3 1 7 2 5 4
 - 5 2 7 1 3 6 4
 - 3 1 7 2 5 6 4
 - 7 1 3 2 5 6 4
 - 4 6 5 2 3 1 7
 - 2 5 6 4 3 1 7
 - 5 2 6 4 3 1 7
 - 3 4 6 2 5 1 7
 - 6 4 3 2 5 1 7
 - 1 5 2 3 4 6 7
- OUF!

À vous de faire sur la permutation :

3 1 5 7 4 6 2

Combien de retournements ?

Conséquences :

Cela doit toujours s'arrêter !!

Un algorithme très simple de V. Chvátal

Terminaison

On peut montrer que l'algorithme précédent termine en un nombre fini d'étapes.

Ebauche de preuve

- 6 3 1 7 2 5 4
- 0 0 0 0 0 0 0
- 5 2 7 1 3 6 4
- 0 1 0 0 0 1 0
- 3 1 7 2 5 6 4
- 0 0 0 0 1 1 0
- 7 1 3 2 5 6 4
- 0 0 1 0 1 1 0
- 4 6 5 2 3 1 7
- 0 0 0 0 0 0 1 ...

Complexité

On peut borner par $O(2^n)$ on considérant que l'on va de

0 0 0 0 0 0

à

1 1 1 1 1 1 de manière strictement monotone suivant un ordre
lexicographique

Conjecture de Chvátal

L'algorithme est en $O(n^2)$?

Des exemples difficiles :

6 2 1 10 11 8 12 3 4 7 9 5
nécessite 172 retournements

2 8 11 12 4 1 10 9 3 6 7 5
nécessite 171 retournements

Les plus mauvais cas avec 12 éléments

Moralité

- Il n'est pas si facile d'analyser la complexité (le comportement) d'un algorithme possédant une seule instruction.
- Ces opérations de retournement interviennent dans la nature sur les génomes et sont très étudiées en bioinformatique (tri par inversion de permutations).

Tout ce que l'on sait à ce jour

- Il existe un exemple en $O(n^2)$
- En moyenne c'est $O(n)$

Conséquences

Un très mauvais algorithme récursif de tri en :

$$2^n + 2^{n-1} + \dots + 1 = 2^{n+1} - 1 \in O(2^{n+1})$$

- 1 Tri par retournements
- 2 Généralisations**
- 3 Les fonctions de Collatz
- 4 La fonction très récursive Tak
- 5 Arbres recouvrants

Considérons une arborescence de racine 0, on numérote les sommets de 1 à n , par niveaux et de la gauche vers la droite .
Plaçons une permutation σ sur les sommets.

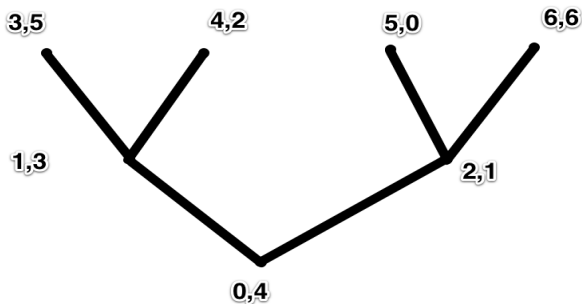
Données: Une arborescence sur $[1, n]$ muni de τ une extension linéaire et σ une permutation de $[1, n]$

Résultat: une permutation σ' telle que $\sigma'(0) = 0$

1 **tant que** $\sigma(0) \neq 0$ **faire**

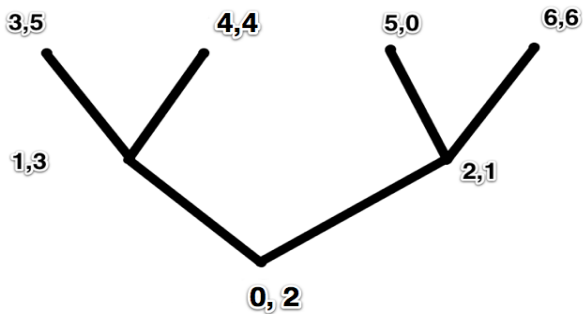
2 ┌ Renverser l'ordre des deuxièmes étiquettes des éléments du
 └ chemin $[0, \sigma(0)]$

Un exemple I

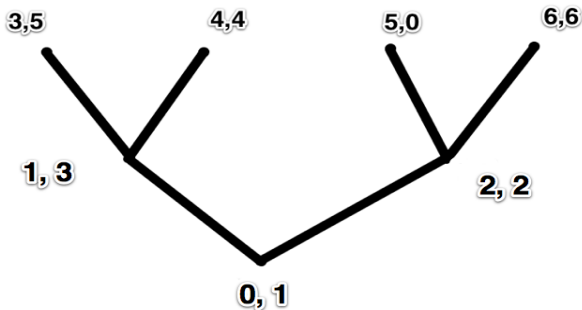


Une arborescence

Un exemple II

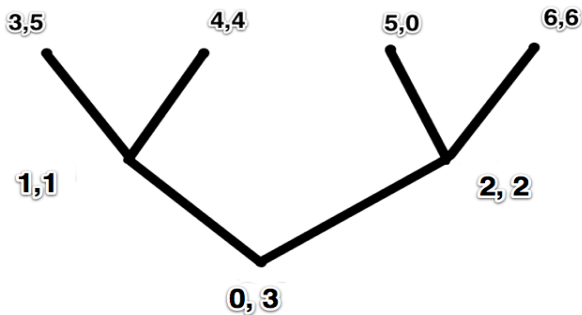


Un exemple III



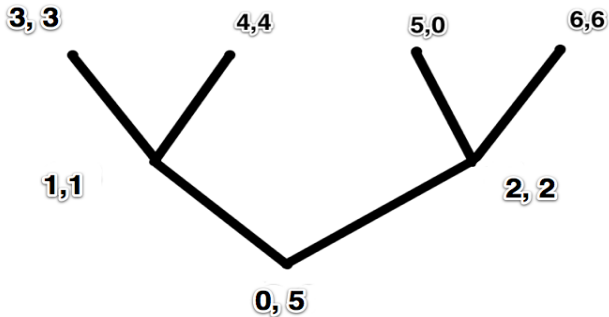
Une arborescence

Un exemple IV



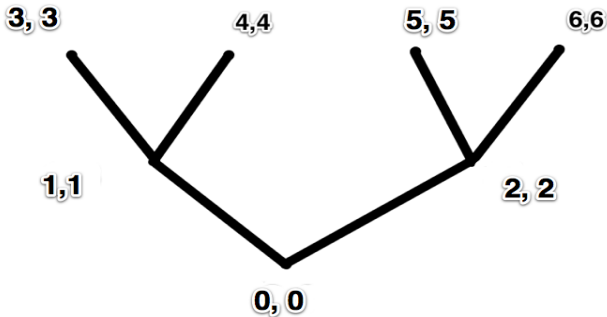
Une arborescence

Un exemple V



Une arborescence

Un exemple VI



Et voilà le travail !

Le processus s'arrête en un temps fini.

Il suffit de considérer un vecteur (x_0, \dots, x_r) avec $x_i =$ le nombre d'éléments de niveau i qui sont à leur place.

Il est facile de vérifier que d'une étape à l'autre ce vecteur croît lexicographiquement strictement.

Si n_i est le nombre de sommets de niveaux i , la complexité maximale est :

$$\prod_{i=1}^{i=r} n_i$$

Toujours plus fort

Soit $P = (X, \leq)$ un ordre gradué possédant un élément minimal unique 0 et τ une extension linéaire de cet ordre.

On considère une permutation σ sur $X = [1, n]$. Chaque sommet de $x \in X$ est muni d'un couple de valeurs $(\tau(x), \sigma(x))$.

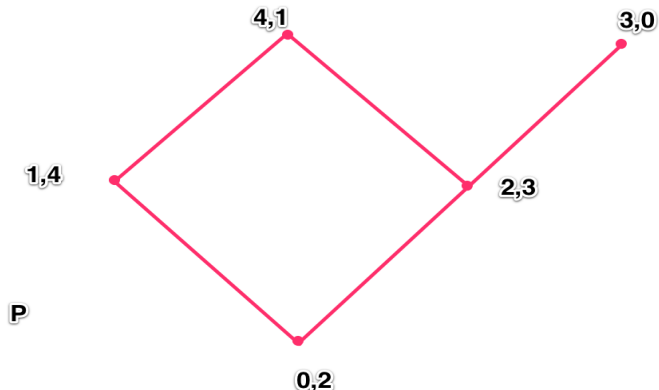
Données: Un ordre sur $[1, n]$ muni de τ une extension linéaire et σ une permutation de $[1, n]$

Résultat: une permutation σ' telle que $\sigma'(0) = 0$

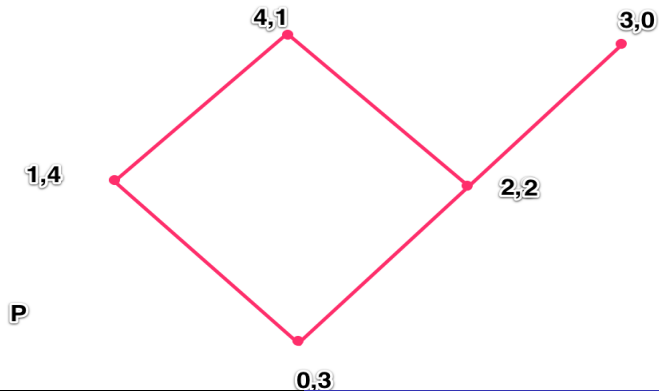
1 **tant que** $\sigma(0) \neq 0$ **faire**

2 $\left[\begin{array}{l} \text{Choisir un chemin de } 0 \text{ à } \sigma(0), \text{ renverser l'ordre des deuxièmes} \\ \text{étiquettes des éléments de ce chemin} \end{array} \right.$

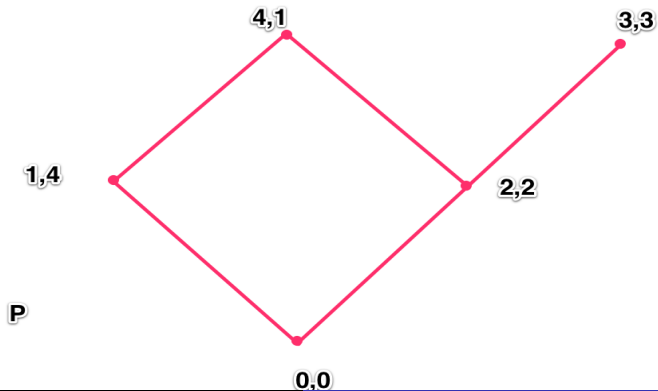
Généralisations aux ordres I



Généralisations aux ordres II



Généralisations aux ordres III



L'argument de finitude est le même que celui des arborescences ;

Le problème de Syracuse :

```
1 f(n) : si n = 1 alors
2   | retourner 1
3 sinon
4   | si n est pair alors
5     | retourner f(n/2)
6   | sinon
7     | retourner f(3n + 1)
```

Expérimentalement (i.e. en programmant cette fonction) pour tout entier n fixé, $f(n) = 1$ (c.a.d. le calcul s'arrête en un temps fini).

Prenez un entier positif ; s'il est pair, divisez-le par 2 ; s'il est impair, multipliez-le par 3 et ajoutez lui 1 ?
Réitérez ce processus sur plusieurs exemples
que semble-t-il se passer ?

Partons de l'entier 7, et regardons la suite alors construite : 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1.

Dès qu'on tombe sur 1 le calcul s'arrête.

Essayons avec les entiers : 8, 9, 10

Il est conjecturé que ce programme s'arrête pour toute valeur de n .

Ce problème dont l'énoncé est très simple, a été posé en 1930 par Lothar Collatz, puis transmis par Helmut Hasse puis enfin par Stanislas Ulam et a passionné tous les mathématiciens qui l'ont considéré. On le connaît aussi sous le nom du problème $3x + 1$

Que sait-on aujourd'hui ?

- Plus d'une centaine d'articles publiés sur la question
- Pour 75 % des entiers la conjecture a été démontrée.
- Mais pour le reste ?????

Un dernier exercice

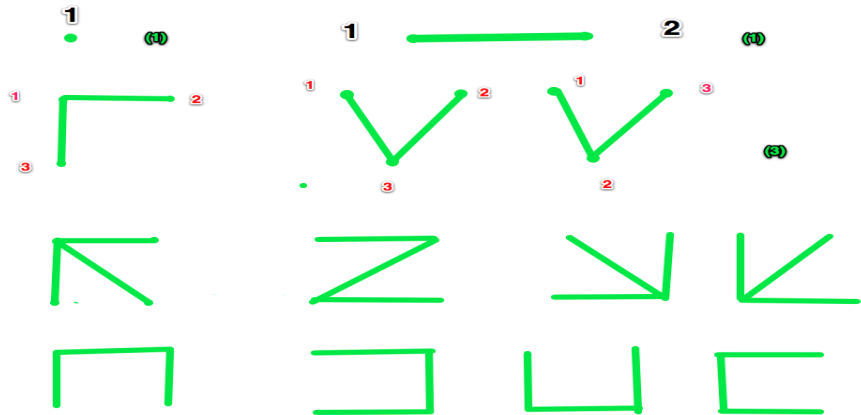
une simple fonction récursive : la fonction Tak

Pour i, j, k entiers on définit la fonction Tak proposée par Takeuchi pour le test des implémentations de la récursivité dans des langages fonctionnels de type Lisp (cf. R.P. Gabriel) :

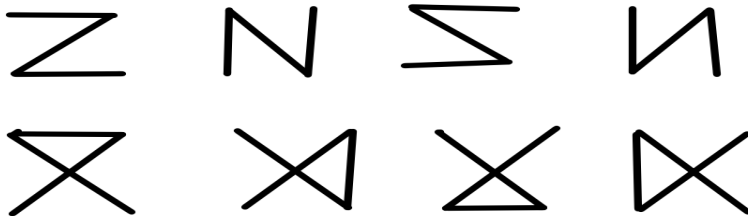
- 1 **Tak**(i, j, k) : si $i \leq j$ alors
- 2 | retourner j
- 3 **sinon**
- 4 | $Tak(Tak(i - 1, j, k), Tak(j - 1, k, i), Tak(k - 1, i, j))$

Montrer que cet algorithme doublement récursif s'arrête pour tout triplet d'entiers (i, j, k) et trouver ce qu'il calcule.

À la main I

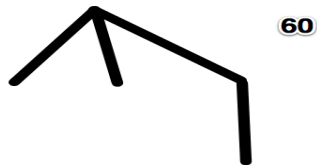
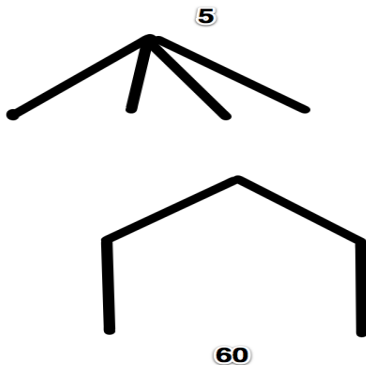


À la main II



(16) sur 4 sommets

À la main toujours III



**au total (125) sur 5
sommets**

Théorème de Cayley 1857

Le graphe complet a n sommets admet n^{n-2} arbres recouvrants différents.