

LICENCE Structures Discrètes
Examen 12 Septembre 2005. Durée 2 heures
Documents interdits

SVP Mettez votre nom sur la copie, cachez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au-dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs - tout téléphone visible sera confisqué

EXERCICE 1 Rappelons que l'ensemble AB des arbres binaires étiquetés sur l'alphabet A est défini inductivement par

(B) $\emptyset \in AB$ (il s'agit de l'arbre vide),

(I) $g, d \in AB \implies \forall a \in A, (a, g, d) \in AB$ (l'arbre de racine a , de fils gauche g et de fils droit d).

Donner une définition inductive du parcours postfixe d'un arbre binaire. ◇

EXERCICE 2 Soit $F_0 = \{a\}$, $F_1 = \{s\}$, $F = F_0 \cup F_1$. L'ensemble T des termes construits sur F est $T = \{a, s(a), s(s(a)), \dots\}$.

Posons $V = \mathbb{N}$. Soit $h: F_0 \rightarrow V$, et $h_s: V \rightarrow V$; il existe une et une seule fonction h^* de T dans V telle que:

(B') Si $t \in F_0$, $h^*(t) = h(t)$,

(I') Si $t = s(t_1)$, $h^*(t) = h_s(h^*(t_1))$.

Calculer h^* si $h(a) = 1$, $h_s(n) = 3 + n$. ◇

EXERCICE 3 Donnez un automate déterministe, complet et minimal reconnaissant le langage $L = ((a + b)^2)^*$. ◇

EXERCICE 4 Soit $A = \{a, b\}$; Soient L_1 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre pair de b et L_2 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre impair de a .

1. Donner pour chaque L_i un automate déterministe complet A_i reconnaissant L_i et exprimer L_i sous forme d'expression rationnelle.

2. Construire à partir des A_i un automate déterministe reconnaissant $L_1 \cap L_2$. ◇

EXERCICE 5 1) Traduire l'ensemble d'énoncés suivants en formules de *Tarski's World*. On notera F_i la formule traduisant \mathbf{F}_i , pour $i = 1, \dots, 4$.

\mathbf{F}_1 : *Tout cube est à droite de tout tétraèdre.*

\mathbf{F}_2 : *Il n'y a pas de dodécaèdre.*

\mathbf{F}_3 : *Il y a exactement deux cubes.*

\mathbf{F}_4 : *Un objet est à droite d'un autre objet uniquement si le second est derrière le premier.*

2) L'ensemble $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ de formules obtenu est-il satisfaisable ? Justifiez votre réponse en dessinant une grille en 2D qui représente un monde qui en est un modèle.

3) L'ensemble de formules $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ est-il T-valide ? Justifiez votre réponse en dessinant une grille en 2D qui représente un monde qui est un contre-exemple.

(On rappelle les prédicats de *Tarski's World* : Tet(x) ("x est un tétraèdre"), Cube(x) ("x est un cube"), Dodec(x) ("x est un dodécaèdre"), BackOf(x,y) ("x est derrière y"), RightOf(x,y) ("x est à droite de y").) ◇

1.

(B) $post(\emptyset) = \varepsilon$

(I) $post((a, g, d)) = post(g)post(d)a$.

2. Montrons par induction que $h^*(s^n(a)) = 3n + 1$.

(B) si $n = 0$, $h^*(s^0(a)) = h^*(a) = h(a) = 1$

(I) supposons $h^*(s^n(a)) = 3n + 1$, et calculons $h^*(s^{n+1}(a)) = h_s((h^*(s^n(a)))) = 3 + 3n + 1 = 3(n + 1) + 1$, d'où le résultat.

3.

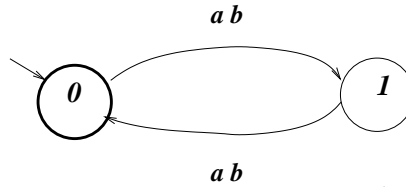


Figure 1 Automate reconnaissant $((a + b)^2)^*$.

4.

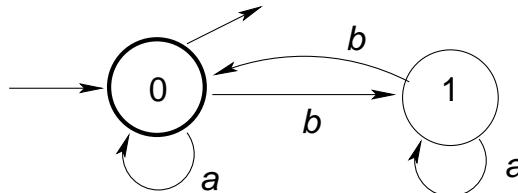


Figure 2 $L_1 = (a + (ba^*b))^*$

Les équations

$$x_{0,0} = ax_{0,0} + bx_{1,0} + \varepsilon$$

$$x_{1,0} = ax_{1,0} + bx_{0,0}$$

d'où $x_{1,0} = a^*bx_{0,0}$, puis en reportant dans la première équation $x_{0,0} = ax_{0,0} + ba^*bx_{0,0} + \varepsilon$
et

$$L_1 = x_{0,0} = (a + (ba^*b))^*$$

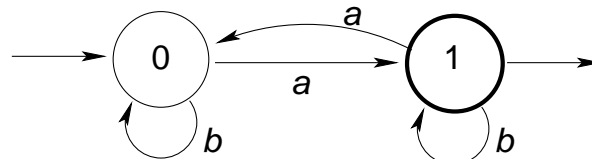


Figure 3 $L_2 = (b + ab^*a)^*ab^*$

Les équations

$$x_{0,1} = bx_{0,1} + ax_{1,1}$$

$$x_{1,1} = bx_{1,1} + ax_{0,1} + \varepsilon$$

d'où

$x_{1,1} = b^*(ax_{0,1} + \varepsilon)$, puis en reportant dans la première équation $x_{0,1} = ax_{0,1} + ba^*bx_{0,1} + \varepsilon$
et

$$L_2 = x_{0,1} = (b + ab^*a)^*ab^*$$

Pour obtenir les automates de la question 2 , on construit l'automate produit (les états sont les couples de $S_1 \times S_2$ Pour l'intersection on ne garde comme états terminaux que les couples formés d'un état terminal de A_1 et d'un état terminal de A_2 , c'est-à-dire ici uniquement l'état 0,1.

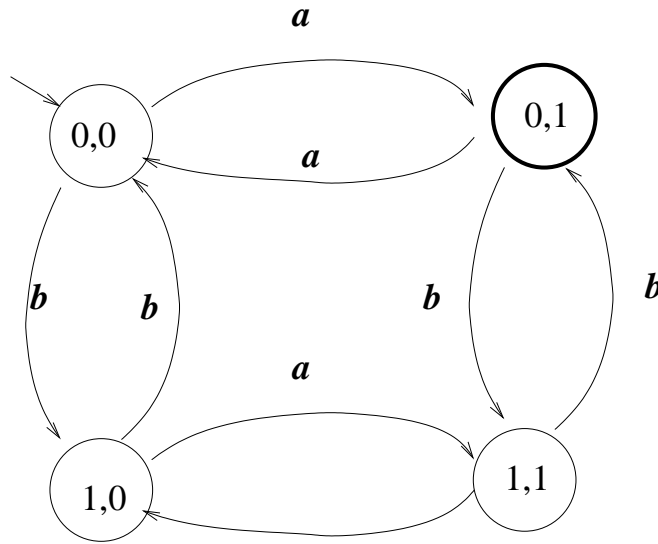


Figure 4 $L_1 \cap L_2$

5.

1) $F_1: \forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Tet(y)) \longrightarrow RightOf(x, y))$

$F_2: \forall x \neg Dodec(x)$

$F_3: \exists y \exists x ((Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge \neg(x = y)) \wedge \forall z (cube(z) \longrightarrow (z = x) \vee (z = y)))$.

$F_4: \forall x \forall y (RightOf(x, y) \longrightarrow BackOf(y, x))$

2) et 3)

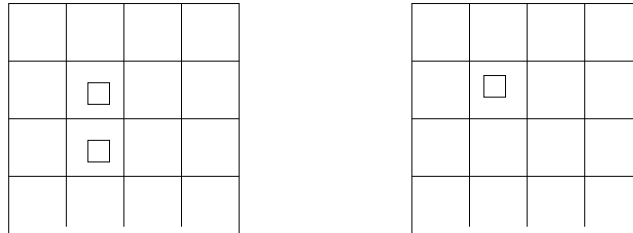


Figure 5 Un modèle et un contre-exemple