

# LICENCE Structures Discrètes

Partiel 15 Novembre 2006. Durée 2heures.

Documents interdits - Mettez votre numero de groupe sur la copie Merci  
Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

EXERCICE 1 On considère  $E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{a, b, c\}$ .

1. Pouvez-vous trouver (a) une application non injective et non surjective, (b) une application surjective et non injective, (c) une application injective, (d) une application bijective de  $E$  dans  $F$  ? Si oui donnez l'application, si non justifiez votre réponse. (e) Trouvez une fonction  $h$  qui ne soit pas une application de  $E$  dans  $F$ .

2. Pouvez-vous trouver (a) une application surjective et non injective, (b) une application injective et non surjective, (c) une application bijective de  $F$  dans  $E$  ? Si oui donnez l'application, si non justifiez votre réponse.  $\diamond$

EXERCICE 2 1. La relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  définie par " $n \mathcal{R} m$  si et seulement si 1 est le seul diviseur commun a  $m$  et  $n$ " est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

2. Quelle est la relation  $\overline{\mathcal{R}}$  complémentaire de  $\mathcal{R}$  ?  $\overline{\mathcal{R}}$  est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?  $\diamond$

EXERCICE 3 On se place dans  $E = \{3, 5, 6, 18, 21, 42\}$  ordonné par la relation " $x$  divise  $y$ ".

1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.

2)  $E$  admet-il un maximum ? un minimum ? Justifiez vos réponses.

3) Donner les éléments maximaux, minimaux de  $E$ .

4) On considère le sous-ensemble  $A = \{21, 6\}$  de  $E$ . Donner les majorants, minorants de  $A$ .  $A$  admet-il un maximum ? un minimum ? Donner la borne supérieure, la borne inférieure de  $A$  (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de  $A$ .  $\diamond$

EXERCICE 4 Un arbre ternaire  $t$  étiqueté sur l'alphabet  $A$  est soit vide, soit formé d'une racine (étiquetée par une lettre de l'alphabet  $A$ ) ayant 3 fils (pouvant être vides ou non). Soit  $AT$  l'ensemble de ces arbres ternaires.

1) Donner au moins quatre exemples d'arbres ternaires sur l'alphabet  $A = \{a, b\}$ .

2) Donner une définition inductive de l'ensemble  $AT$  des arbres ternaires.

3) Soient  $n(t)$  le nombre de nœuds de  $t$  et  $ar(t)$  le nombre d'arêtes de  $t$ . Donner une définition inductive de  $n$  et  $ar$ .

4) Montrer par induction que si  $t$  est un arbre ternaire non vide  $n(t) = ar(t) + 1$ .

5) Donner une définition inductive du parcours préfixe d'un arbre ternaire. Rappel : le parcours préfixe est la suite des étiquettes rencontrées en parcourant l'arbre de haut en bas puis de gauche à droite : on écrit d'abord l'étiquette de la racine, puis on parcourt ses fils en allant de gauche à droite. Par exemple les parcours préfixes des arbres dessinés ci-dessous sont  $abc$  et  $abfcdeg$ .



Figure 1

EXERCICE 5 La duale d'une fonction booléenne  $f$  est définie par  $\tilde{f}(x, y) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y})}$ .  $f$  est dite *auto-duale* ssi  $f = \tilde{f}$ .

1) Donnez la table de vérité de la fonction  $f(x, y) = \overline{x} \overline{y} + y \overline{x}$ , sa fonction duale et la table de vérité de sa fonction duale. Que remarquez-vous ?

2) Donnez deux fonctions booléennes auto-duales.  $\diamond$

1. 1)  $g: E \rightarrow F$   $g(a) = b$ ,  $g(b) = b$ ,  $g(c) = a$ ,  $g(d) = a$ ;  $g$  est non injective et non surjective;

$f: E \rightarrow F$   $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$ ,  $f(c) = a$ ,  $f(d) = a$ :  $f$  est surjective et non injective, on ne peut pas trouver d'injection par le principe des tiroirs, et donc pas de bijection non plus.

$h: E \rightarrow F$   $h(a) = b$ ,  $h(c) = a$ ,  $h(d) = c$ :  $h$  est une fonction et n'est pas une application.

2)  $h: \{a, b, c\} \rightarrow E$   $h(a) = b$ ,  $h(b) = b$ ,  $h(c) = d$ ;  $h$  est injective non surjective. Il n'y a pas de surjection de  $F$  dans  $E$  puisque  $|E| > |F|$ . Il n'y a donc pas non plus de bijection de  $F$  dans  $E$ .

2. 1.  $\mathcal{R}$  est symétrique, non réflexive et non transitive. Contrexemples : réflexive: on n'a pas  $2\mathcal{R}2$ ; transitivité: on a  $2\mathcal{R}1$  et  $1\mathcal{R}2$  et pas  $2\mathcal{R}2$

2. La relation  $\overline{\mathcal{R}}$  sur  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  définie par "n $\overline{\mathcal{R}}$ m si et seulement si n et m ont un diviseur commun différent de 1". Cette relation n'est pas transitive. Par exemple, 2 et 6 ont un diviseur commun (2), 6 et 3 ont un diviseur commun (3), mais le diviseur commun à 2 et 3 est 1. Elle est symétrique et non réflexive car pour  $n = 1 = m$ , on n'a pas  $1 \mathcal{R} 1$ . Elle est réflexive sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

3. 1)

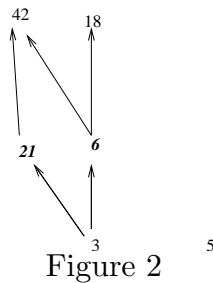


Figure 2

2)  $E$  admet-il un minimum ? non 3 et 5 premiers entre eux. un maximum ? Non car 5 ne divise pas 42.

3) Éléments maximaux, minimaux de  $E$ ; maximaux : 5,18,42 et minimaux : 5 et 3.

4) On considère le sous-ensemble  $A = \{21, 6\}$  de  $E$ . Donner les majorants : 42.

les minorants de  $A$  :  $\{3\}$ .

Donner la borne supérieure : 42,

la borne inférieure : 3.

Donner les éléments maximaux : 21,6.

les éléments minimaux : 21,6.

$A$  admet-il un maximum ? NON . un minimum ? NON

4. 1)  $\emptyset$ ,  $(a, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ ,  $(b, \emptyset, (a, \emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$ ,  $(a, (b, \emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset, (b, \emptyset, \emptyset, \emptyset))$

2) La définition inductive de l'ensemble  $AT$  est

(B)  $\emptyset \in AT$ .

(I)  $t_1, t_2, t_3 \in AT \implies \forall a \in A, (a, t_1, t_2, t_3) \in AT$

3)

(B)  $n(\emptyset) = 0$

(I) si  $\forall b \in A$ , si  $t = (b, t_1, t_2, t_3)$  est un arbre ternaire, alors  $n(t) = 1 + \sum_{i=1}^{i=3} n(t_i)$ .

(B)  $ar(\emptyset) = 0$ , et

(I)

$$ar(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = (a, \emptyset, \emptyset, \emptyset); \\ 1 + ar(t_i), & \text{si } t = (a, t_1, t_2, t_3) \text{ et } t_i \neq \emptyset, t_j = t_k = \emptyset, i, j, k \in \{1, 2, 3\}; \\ 2 + ar(t_i) + ar(t_j), & \text{si } t = (a, t_1, t_2, t_3) \text{ et } t_i \neq \emptyset \neq t_j, t_k = \emptyset, i, j, k \in \{1, 2, 3\}; \\ 3 + \sum_{i=1}^{i=3} ar(t_i), & \text{si } t = (a, t_1, t_2, t_3) \text{ et } t_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, 2, 3\}; \end{cases}$$

4) Soit  $P(x)$  la propriété " $n(x) = ar(x) + 1$ ".

(B)  $\forall a \in A$ , si  $t = (a, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$  alors  $n(t) = 1 = 0 + 1 = ar(t) + 1$ .

(I) Si  $t = (a, t_1, t_2, t_3)$ , avec au moins un des  $t_i$  non vide, et on suppose  $n(t_i) = ar(t_i) + 1$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ . On reprend les différents cas de la définition de  $ar$ .

1. si  $t = (a, t_1, t_2, t_3)$  et  $t_i \neq \emptyset, t_j = t_k = \emptyset, i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $ar(t) = 1 + ar(t_i)$  et  $n(t) = 1 + n(t_i)$  donc  $n(t) = 1 + ar(t)$ .

2. si  $t = (a, t_1, t_2, t_3)$  et  $t_i \neq \emptyset \neq t_j, t_k = \emptyset, i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $ar(t) = 2 + ar(t_i) + ar(t_j)$  et  $n(t) = 1 + n(t_i) + n(t_j) = 1 + 1 + ar(t_i) + 1 + ar(t_j)$  et donc  $n(t) = 1 + ar(t)$ .

3. si  $t = (a, t_1, t_2, t_3)$  et  $t_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $n(t) = 1 + \sum_{i=1}^{i=3} n(t_i) = 1 + \sum_{i=1}^{i=3} (1 + ar(t_i))$  et  $ar(t) = 3 + \sum_{i=1}^{i=3} ar(t_i)$ , d'où  $n(t) = 1 + ar(t)$ .

5)

(B)  $pref(\emptyset) = \varepsilon$

(I)  $pref((a, t_1, t_2, t_3)) = a pref(t_1) pref(t_2) pref(t_3)$

5. 1. On remarque que  $f(x, y) = \overline{xy} + y\overline{x} = \overline{x}(\overline{y} + y) = \overline{x}$ .  $f$  est donc autoduale.

2. les autres fonctions autoduales sont  $f(x, y) = x$ ,  $f(x, y) = y$  et  $f(x, y) = \overline{y}$ .