Exercice

Exercice : Réseaux monotones-homogènes.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des compteurs (fonctions croissantes au sens large de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ pour les compteurs généraux et de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ pour les compteurs finis) muni de la relation d'ordre partiel $F \leq G$ si $F(t) \leq G(t)$ pour tout t.
Soit $F \in \mathcal{M}$.

- Si F est fini, on lui associe le compteur $\widetilde{F}$ défini par $\widetilde{F}(t) = -F(-t)$ pour tout t.
- Pour tout $u \in \mathbb{Z}$, on appelle u-translation en temps de F la fonction $F_u \in \mathcal{M}$ définie par $F_u(t) = F(t+u)$ pour tout t.
- Pour tout $u \in \mathbb{Z}$, on appelle u-translation en espace de F la fonction $u + F \in \mathcal{M}$ définie par $u + F(t) = u + F(t)$ pour tout t.

Soit $\mathcal{S}$ un opérateur de $\mathcal{M}$ dans lui même. On dit que $\mathcal{S}$ est

- Monotone si $F \leq G$ implique $\mathcal{S}(F) \leq \mathcal{S}(G)$;
- Homogène en temps si $\mathcal{S}(F_u) = (\mathcal{S}(F))_u$ pour tout u;
- Homogène en espace si $\mathcal{S}(u+F) = u + \mathcal{S}(F)$ pour tout u.

1. Pour $F \in \mathcal{M}$, soit L_F l'opérateur défini par $L_F(R) = R \otimes F$ avec

   $$R \otimes F(t) = \inf_{s \in \mathbb{Z}} R(s) + F(t-s) = \inf_{s \in \mathbb{Z}} F(s) + R(t-s) \tag{1}$$

   pour tout $R \in \mathcal{M}$. On restreindra le domaine de définition de cet opérateur à l'ensemble des $R \in \mathcal{M}$ tels que $R \otimes F(t)$ est différent de $-\infty$ pour tout t.

   Montrer que L_F est monotone et homogène en temps et en espace. Donner un exemple d'opérateur qui a ces trois propriétés et qui n'est pas représentable sous la forme (1).

2. Soit E un compteur fini de $\mathcal{M}$ tel que $E(0) = 0$. On dit que $R \in \mathcal{M}$ est E-réglé si $R \leq R \otimes E$. On ne supposera pas ici que $E(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Donner une interprétation de la propriété $R(t) - R(s) \leq E(t-s)$ lorsque $t < s$.

3. Soit $\mathcal{S}$ un opérateur monotone et homogène (en temps et espace) représentant un élément de réseau et soit R un compteur représentant un processus d'arrivée dans cet élément. On suppose de $\mathcal{S}(R)$ est fini. On appelle congestion de cet élément de

réseau au temps t pour le processus d'arrivée R la quantité $B(t) = R(t) - (\mathcal{S}(R))(t)$. Montrer que si R est E-réglé, alors pour tout t,

$$B(t) \leq \widetilde{\left(\mathcal{S}(\widetilde{E})\right)}(0). \tag{2}$$

[On pourra utiliser le fait que pour tout t, $R(u) \geq R(t) - E(t-u)$ quelque soit u.]

4. Calculer $\widetilde{\left(\mathcal{S}(\widetilde{E})\right)}(0)$ quand $\mathcal{S}$ est l'opérateur L_F défini en (1) et connecter ceci au résultat du cours qui donne une borne sur la congestion d'un élément de réseau alimenté par un processus réglé et garantissant une courbe de service.

5. Montrer que sous les hypothèses de la question 3, si la contrainte de flot $\mathcal{S}(R) \leq R$ est satisfaite, le compteur $\mathcal{S}(R)$ est réglé pour la fonction $\widetilde{\left(\mathcal{S}(\widetilde{E})\right)}$. Lorsque $\mathcal{S} = L_F$, connecter ceci au résultat du cours correspondant.