

DEA Algorithmique X/ENS/ENST/Paris VI/Paris VII/Paris XI
Filière Modélisation des réseaux
Examen d'analyse Markovienne

Alain Jean-Marie

6 mars 2002

La durée de cet examen est 2h. Les notes et le support de cours sont autorisés. Les autres documents sont interdits.

Exercice 1 (8 pts)

On considère une file d'attente avec un serveur, une salle d'attente de capacité infinie, et ayant le fonctionnement suivant. Le temps est discret. À chaque unité de temps, on a :

- si un client était en service pendant l'intervalle précédent, il finit son service avec probabilité d , mais reste dans la file d'attente avec probabilité $\bar{d} = 1 - d$;
- un nouveau client arrive avec probabilité a , et aucun client n'arrive avec probabilité $\bar{a} = 1 - a$;
- si au moins un client est présent après cela, un client entre en service.

- Q1) Expliquer pourquoi le processus $\{N(t); t \in \mathbb{N}\}$ du nombre de clients dans la file (salle d'attente + serveur) est une chaîne de Markov en temps discret. Décrire sa matrice de transition P et représenter son diagramme de transition.
- Q2) Sous quelles conditions sur a et d cette chaîne est-elle irréductible et apériodique?
On supposera ces conditions vérifiées dans la suite.
- Q3) Écrire les équations d'équilibre satisfaites par des probabilités stationnaires $\pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$.
- Q4) Sous quelles conditions sur a et d existe-t-il de telles probabilités stationnaire? Les calculer.

Exercice 2 (12 pts)

On considère dans cet exercice un processus d'arrivée dit: «processus de Poisson modulé par Markov» (PPMM), et une file d'attente avec ce processus comme arrivée de clients.

Soit tout d'abord une chaîne de Markov en temps continu $\{X(t), t \geq 0\}$ sur l'espace d'états: $\mathcal{E} = \{0, 1\}$, et dont le diagramme de transition est donné dans la Figure 1.

- Q1) Justifier que cette chaîne de Markov admet une distribution de probabilité stationnaire unique, et la calculer. On la notera $\pi = (\pi_0, \pi_1)$.

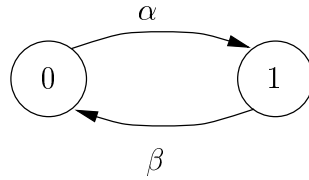


Figure 1: Une chaîne de Markov à deux états

On considère à présent un processus d'arrivée (le processus PPM) qui a les propriétés suivantes:

- les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ tant que la chaîne $\{X(t)\}$ se trouve dans l'état 1.
- aucun client n'arrive tant que la chaîne $\{X(t)\}$ se trouve dans l'état 0.

Q2) Soit $A(t)$ le nombre d'arrivées de ce processus à la date t . Montrer que le processus $\{(X(t), A(t)); t \in \mathbb{R}\}$ est une chaîne de Markov en temps continu sur l'espace $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Représenter son diagramme de transition.

Q3) Quel est le débit $\hat{\lambda}$ de ce processus? (expliquer votre raisonnement). Exprimer la réponse en fonction de λ, π_0, π_1 , puis utiliser Q1) pour l'exprimer avec λ, α et β uniquement.

Soit finalement une file d'attente FIFO avec un serveur et capacité infinie, telle que le processus d'arrivée est PPM, et telle que le temps de service des clients a une distribution exponentielle de paramètre μ .

Q4) Soit $N(t)$ le nombre de clients dans la file d'attente (salle d'attente+serveur) à la date t . Justifier pourquoi le processus $\{(N(t), X(t)), t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov en temps continu sur l'espace $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Représenter son diagramme de transition.

Q5) Écrire les équations d'équilibre satisfaites par des probabilités stationnaires $\pi(n, i)$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1\}$.

Q6) Soit le vecteur $\pi_n = (\pi(n, 0), \pi(n, 1))$. Montrer qu'il existe des matrices A_0, A_1 et B telles que

$$\begin{cases} A_0 \pi_0 &= \mu \pi_1 \\ A_1 \pi_n &= B \pi_{n-1} + \mu \pi_{n+1}, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{S})$$

Q7) Soit la fonction génératrice vectorielle $\Pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_n$. Utiliser le système (S) pour montrer que $\Pi(z)$ est solution d'une équation fonctionnelle matricielle de la forme:

$$\Pi(z) K(z) = \pi_0 L(z), \quad (\text{E})$$

où $K(z)$ et $L(z)$ sont des matrices connues.

Q8) (bonus) En vous inspirant de la méthode du noyau et en raisonnant sur le déterminant du système linéaire (E), expliquer comment déterminer la valeur π_0 . Quelle est la condition de stabilité de la file d'attente? Faire le calcul le plus loin possible...