

# Systèmes à événements discrets I

DEA Algorithmique, 2001-2002.

Durée: 60 minutes. Les notes de cours sont les seuls documents autorisés.

L' exercice 2 utilise les *résultats* de l' exercice 1. Les notations sont les mêmes dans les deux exercices et sont celles du cours (dans la mesure du possible). Pour un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , on note  $\mathbf{t}x = \max_i x_i$ .

## Exercice 1

Soit une matrice  $(\max, +)$   $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ . Le graphe associé à  $A$  est noté à  $G(A)$ . Le temps de cycle généralisé de  $A$  est noté  $\chi(A) \in \mathbb{R}_{\max}^n$ . On note  $\mathcal{C}(A)$  l'ensemble des nœuds du graphe qui appartiennent à un circuit critique de  $G(A)$  (i.e. à un circuit de poids moyen  $\mathbf{t}\chi(A)$ ).

Dans la suite on suppose (sans perte de généralités) que  $\mathbf{t}\chi(A) = 0$ .

**Q.1.** Montrer que la matrice  $A^+ = \max_{k=1}^{\infty} A^k$  est bien définie et vérifie  $A^+ = \max_{k=1}^n A^k$ .

On définit  $P_A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  de la façon suivante :

$$(P_A)_{ij} = \max_{k \in \mathcal{C}(A)} (A_{ik}^+ + A_{kj}^+).$$

**Q.2.** Donner l'interprétation de  $(P_A)_{ij}$  dans le graphe  $G(A)$ . Montrer que  $P_A \leq A^+$ .

**Q.3.** Soit  $i \in \mathcal{C}(A)$ . Montrer que  $(A^+)_{ii} = (P_A)_{ii} = 0$  puis montrer que  $(P_A)_i = (A^+)_i$  et  $(P_A)_{.i} = (A^+)_{.i}$ .

**Q.4.** Soit  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  tel que  $A \otimes x \leq x$ . Montrer que  $(A \otimes x)_i = x_i$  pour  $i \in \mathcal{C}(A)$ . Montrer que  $P_A \otimes x \leq x$  et que  $(P_A \otimes x)_i = x_i$  pour  $i \in \mathcal{C}(A)$ .

**Q.5.** Montrer que  $A \otimes P_A = P_A \otimes A = P_A$  et que  $P_A \otimes P_A = P_A$ .

**Q.6.** Montrer que  $x$  est vecteur propre pour la valeur propre 0 de  $A$  si et seulement si  $x$  est vecteur propre pour la valeur propre 0 de  $P_A$ . Montrer que l'image de  $P_A$  est l'espace propre de  $A$  pour la valeur propre 0.

## Exercice 2

Soit  $f$  une application topocale de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui appartient à la classe  $(\min, \max, +)$ . L'application  $f$  peut s'écrire sous la forme  $f(x) = \min_{A \in S} A \otimes x$  où  $S$  un ensemble fini de matrices  $(\max, +)$  de dimension  $n \times n$ , et où le min est défini composante par composante.

Dans toute la suite, on suppose que l'ensemble  $S$  est *rectangulaire* c'est à dire que l'on a la propriété suivante : si  $A \in S, B \in S$  et  $E \subset \{1, \dots, n\}$  alors  $C \in S$  où  $C$  est définie par

$$C_i = \begin{cases} A_i & \text{pour } i \in E \\ B_i & \text{pour } i \notin E \end{cases}.$$

On sait que  $f$  admet un temps de cycle généralisé  $\chi(f) \in \mathbb{R}^n$  et un point fixe généralisé  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f^n(x) = x + n \times \chi(f)$  (théorème du cours sur toute la classe affine).

**Q.1.** Montrer que  $\chi(f) \leq \min_{A \in S} \chi(A)$ .

**Q.2.** Supposons que  $\chi(f) = (h, \dots, h), h \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\chi(f) = \min_{A \in S} \chi(A)$ .

Les questions 3, 4 et 5 vont permettre de démontrer un résultat dual : si  $\min_{A \in S} \chi(A) = (h, \dots, h)$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , alors  $\chi(f) = \min_{A \in S} \chi(A)$ . (En fait l'égalité  $\chi(f) = \min_{A \in S} \chi(A)$  est toujours vraie, résultat donné sans preuve en cours.)

On suppose dans les questions 3, 4 et 5 que  $\min_{A \in S} \chi(A) = (0, \dots, 0)$  (sans perte de généralité par rapport au cas  $\min_{A \in S} \chi(A) = (h, \dots, h)$ ). **On admet** le résultat suivant (qui découle de la rectangularité de  $S$ ) : il existe  $A_1 \in S$  tel que  $\chi(A_1) = (0, \dots, 0)$ .

**Q. 3.** [Cette question utilise les résultats de l'exercice 1.] Montrer qu'il existe  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x_1) \leq x_1$ . Montrer qu'il existe  $A_2 \in S$  vérifiant : (a)  $A_2 \otimes x_1 = f(x_1)$ ; (b)  $(A_2)_{i.} = (A_1)_{i.}$  pour tout  $i$  tel que  $f_i(x_1) = (x_1)_i$ . Montrer que  $\chi(A_2) = (0, \dots, 0)$ . En déduire que  $\mathcal{C}(A_2) \subset \mathcal{C}(A_1)$ .

**Q. 4.** [Cette question utilise les résultats de l'exercice 1.] On pose  $x_2 = P_{A_2} \otimes x_1$ . Montrer que  $A_2 \otimes x_2 = x_2$ , que  $x_2 \leq x_1$  et que si  $i \in \mathcal{C}(A_2)$  alors  $(x_2)_i = (x_1)_i$ .

**Q. 5.** En itérant la construction précédente, on obtient une suite  $(A_k)_k$  de matrices de  $S$  et une suite associée  $(x_k)_k$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer qu'il existe  $\ell$  et  $k$ ,  $k < \ell$ , tels que  $A_k = A_\ell$  et  $x_k = x_\ell$ . En déduire que  $\chi(f) = (0, \dots, 0)$ .

**Q. 6.** Soit  $f(x) = \min_{A \in S} A \otimes x$  où toutes les matrices  $A \in S$  sont irréductibles. Proposer un algorithme permettant de calculer  $\chi(f)$  et de trouver un vecteur propre généralisé.

**Q. 7** Quelles étapes de l'algorithme précédent ne sont plus valables lorsqu'on ne suppose pas que toutes les matrices sont irréductibles ?

# Correction de l'Exercice 1

**Q.1.** Cf notes de cours.

**Q.2.**  $(P_A)_{ij}$  = poids maximal dans  $G(A)$  d'un chemin de  $i$  à  $j$  passant par au moins un nœud critique. On en déduit immédiatement que  $P_A \leq A^+$ . Autre méthode :

$$\begin{aligned} A^+ &= A^+ A^+ \\ A_{ij}^+ &= \max_k (A_{ik}^+ + A_{kj}^+) \geq \max_{k \in \mathcal{C}(A)} (A_{ik}^+ + A_{kj}^+) = (P_A)_{ij}. \end{aligned}$$

**Q.3.** Par définition du graphe critique,  $A_{ii}^+ = 0$  pour  $i \in \mathcal{C}(A)$ . Toujours pour  $i \in \mathcal{C}(A)$ , on a

$$(P_A)_{ii} = \max_{k \in \mathcal{C}(A)} (A_{ik}^+ + A_{ki}^+) \geq A_{ii}^+ + A_{ii}^+ = 0.$$

Comme  $P_A \leq A^+$ , on en déduit que  $(P_A)_{ii} = A_{ii}^+ = 0$ . Maintenant,

$$(P_A)_{ji} \geq A_{ji}^+ + A_{ii}^+ = A_{ji}^+.$$

On a bien  $(P_A)_{.i} = A_{.i}^+$ . On montre l'égalité des lignes d'indice  $i$  de la même façon.

**Q.4.** On a

$$A^n x \leq \dots \leq A^2 x \leq Ax \leq x \implies A^+ x \leq x \implies P_A x \leq x. \quad (1)$$

Pour  $i \in \mathcal{C}(A)$ , on a

$$\begin{aligned} (A^+ x)_i &= \max_j (A_{ij} + x_j) \geq A_{ii}^+ + x_i = x_i \\ (P_A x)_i &= \max_j ((P_A)_{ij} + x_j) \geq (P_A)_{ii} + x_i = x_i. \end{aligned}$$

On en déduit que  $(P_A x)_i = x_i$ . On a de même que  $(A^+ x)_i = x_i$  ce qui implique qu'il existe  $k \leq n$  tel que  $(A^k x)_i = x_i$ , ce qui entraîne  $(Ax)_i = x_i$  d'après (1).

**Q.5.** Étant donnés  $i$  et  $j$ , il existe  $k_1$  et  $k_2$  avec  $k_2 \in \mathcal{C}(A)$  tels que

$$\begin{aligned} (AP_A)_{ij} &= A_{ik_1} + A_{k_1 k_2}^+ + A_{k_2 j}^+ \\ &\leq A_{k_1 k_2}^+ + A_{k_2 j}^+ \leq (P_A)_{ij} \end{aligned}$$

Étant donnés  $i$  et  $j$ , il existe  $k_1 \in \mathcal{C}(A)$  tel que

$$(P_A)_{ij} = A_{ik_1}^+ + A_{k_1 j}^+ = A_{ik_1}^+ + A^+ k_1 k_1 + A_{k_1 j}^+ \leq A_{ik_1} + A^+ k_1 k_1 + A_{k_1 j}^+ \leq A_{ik_1} + (P_A)_{k_1 j} \leq (AP_A)_{ij}.$$

On en conclut que  $AP_A = P_A$ . On démontre de la même façon que  $P_A A = P_A$ .

On a  $A(P_A)_{.i} = (P_A)_{.i}$ . Cela implique par la question 4, que  $P_A(P_A)_{.i} \leq (P_A)_{.i}$ . On a donc montré que  $P_A P_A \leq P_A$ . Soient  $i$  et  $j$  donnés. Soit  $k \in \mathcal{C}A$  tel que  $(P_A)_{ij} = A_{ik}^+ + A_{kj}^+$ . On a (en utilisant la question 3)

$$(P_A P_A)_{ij} \geq (P_A)_{ik} + (P_A)_{kj} = A_{ik}^+ + A_{kj}^+ = (P_A)_{ij}.$$

On en conclut que  $P_A P_A = P_A$ .

**Q.6.** Soit un vecteur  $x$  tel que  $P_a x = x$ . D'après la question 5, on a  $Ax = AP_a x = P_A x = x$ . Soit maintenant un vecteur  $x$  tel que  $Ax = x$ . On a, pour tout  $i$ ,

$$\begin{aligned} (P_A x)_i &= \max_k [(P_A)_{ik} + x_k] = \max_k [\max_u [A_{iu}^+ + A_{uk}^+] + x_k] \\ &= \max_u [A_{iu}^+ + \max_k [A_{uk}^+ + x_k]] = \max_u [A_{iu}^+ + (A^+ x)_u] \\ &= \max_u [A_{iu}^+ + x_u] = (A^+ x)_i = x_i. \end{aligned}$$

Soit  $x \in \text{Im}(P_A)$ . Il existe  $y$  tel que  $P_A y = x$ . D'après la question 5, on a  $Ax = AP_A y = P_A y = x$ . Réciproquement soit  $x$  tel que  $Ax = x$ . On a  $P_A x = x$ , donc  $x \in \text{Im}(P_A)$ .

## Correction de l'Exercice 2

**Q.1.** Soit  $A \in S$ , on a  $f(x) \leq Ax$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . On en déduit que  $\chi(f) = \lim_k f^k(x)/k \leq \lim_k (A^k x)/k = \chi(A)$ . On a bien  $\chi(f) \leq \min_{A \in S} \chi(A)$ .

**Q.2.** Soit  $g$  l'application  $(\min, \max, +)$  définie par

$$g(x) = f(x) - (h, \dots, h) = \min_{A \in S} Ax - (h, \dots, h).$$

On a  $\chi(g) = (0, \dots, 0)$ . D'après le théorème sur la classe affine, il existe  $y \in \mathbb{R}^n$  tel que  $g(y) = y$ . D'autre part il existe  $B \in S$  tel que  $g(y) = By - (h, \dots, h) = y$ . Ceci implique que  $\chi(B) = (h, \dots, h)$ . Au vu de la question 1, on obtient  $\chi(f) = (h, \dots, h) = \min_{A \in S} \chi(A)$ .

**Q.3.** On a  $\chi(A_1) = (0, \dots, 0)$  donc il existe  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $A_1 x_1 = x_1$ . On en déduit que

$$f(x_1) = \min_{A \in S} Ax_1 \leq A_1 x_1 = x_1.$$

Comme  $S$  est rectangulaire, il existe  $A_2 \in S$  tel que  $f(x_2) = A_2 x_2$  et on peut choisir  $A_2$  de sorte que  $(A_2)_i = (A_1)_i$ , si  $f(x_1)_i = (x_1)_i$ .

On a  $A_2 x_1 \leq A_1 x_1 = x_1$ . On en déduit que  $\chi(A_2) \leq \chi(A_1)$ , d'où

$$(0, \dots, 0) = \min_{A \in S} \chi(A) \leq \chi(A_2) \leq \chi(A_1) = (0, \dots, 0) \implies \chi(A_2) = (0, \dots, 0).$$

On a  $A_2 x_1 \leq x_1$ . Pour  $i \in \mathcal{C}(A_2)$ , on a  $(A_2 x_1)_i = (x_1)_i$  de par la question 4 de l'exercice 1. On en déduit que  $(A_2 x_1)_i = (A_1 x_1)_i = (x_1)_i$  et donc par construction  $(A_2)_i = (A_1)_i$ . Soit  $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$  un circuit critique de  $G(A_2)$ . On a

$$(A_2)_{i_1 i_2} + \dots + (A_2)_{i_k i_1} = 0 \implies (A_1)_{i_1 i_2} + \dots + (A_1)_{i_k i_1} = 0.$$

On a bien  $\mathcal{C}(A_2) \subset \mathcal{C}(A_1)$ .

**Q.4.** Le vecteur  $x_2$  appartient à l'image de  $P_{A_2}$  donc c'est un vecteur propre de  $A_2$  de par la question 6 de l'exercice 1.

On a  $A_2 x_1 \leq x_1$  ce qui entraîne  $x_2 = P_{A_2} x_1 \leq x_1$  de par la question 4 de l'exercice 1. D'autre part, en utilisant cette même question 4 de l'exercice 1, on a  $(x_2)_i = (P_{A_2} x_1)_i = (x_1)_i$  pour  $i \in \mathcal{C}(A_2)$ .

**Q.5.** Comme la suite  $(A_k)_k$  est à valeurs dans l'ensemble fini  $S$ , il existe  $k, l$  avec  $k < l$  tels que  $A_k = A_l$ . D'autre part on a  $x_l \leq x_k$ . Pour montrer que  $x_k = x_l$ , on peut utiliser l'un ou l'autre des deux résultats suivants.