Modélisation et dynamique des réseaux max-plus

B. Gaujal et J. Mairesse

DEA Algorithmique, 2003-2004

Durée: 2 heures. Les notes de cours sont les **seuls** documents autorisés.

Exercice 1

On considère une intersection routière en T pour laquelle les flux de traffic A,B,C,D et E (représentés en Figure 1) sont autorisés.

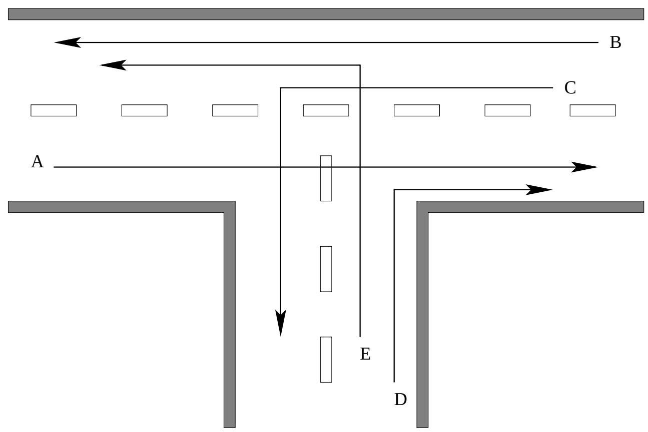


Figure 1: Intersection routière en T.

Pour chaque $X \in \{A, B, C, D, E\}$, on appelle phase de X un intervalle de temps pendant lequel le flux X est autorisé. La signalisation routière organise le traffic suivant les règles suivantes:

1. Les n-ième phases de C et D commencent après la fin de la n-ième phase de A.
2. La n-ième phase de E commence après la fin des n-ième phases de C et B.
3. La $(n+1)$-ième phase de A commence après la fin des n-ième phases de D et E.
4. La $(n+1)$-ième phase de B commence après la fin de la n-ième phase de E.

Question 1. Justifier que le graphe d'événement de la Figure 2 modélise l'intersection routière décrite ci-dessus.

Question 2. On impose les durées minimales suivantes aux phases:

A	B	C	D	E
3	5	2	7	4

On souhaite que chaque phase soit la plus courte possible (tout en respectant les contraintes). Soit $\Sigma = \{A, B, C, D, E\}$. Soit $X(n) \in \mathbb{R}^{\Sigma}$, où $X(n)_U$ est l'instant de début de la n-ième phase de U. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{\Sigma \times \Sigma}$, que l'on déterminera explicitement, telle que :

$$X(n+1) = X(n) \otimes A ,$$

où $\otimes$ correspond au produit dans le semi-anneau $(\max, +)$.

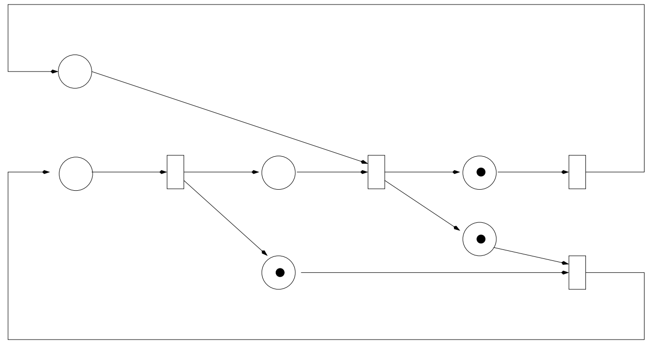


Figure 2: Modélisation sous forme de graphe d'événement.

Question 3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Déterminer l'existence d'un mode de fonctionnement périodique pour l'intersection. Pour ce mode de fonctionnement, déterminer la durée de la période totale ainsi que la durée des phases de A, B, C, D et E.

Question 4. On impose en plus que les n-ième phases de A et B commencent simultanément. Déterminer (sans recalculer la matrice A) si la période d'un mode de fonctionnement périodique s'en trouve modifiée. Commenter.

Question 5. On reprend le modèle de la Question 3 mais on suppose en plus qu'à tout instant un flux et un seul est autorisé. Déterminer la période totale minimale d'un mode de fonctionnement périodique de l'intersection.

Exercice 2

On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des suites $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ croissantes.

On considère les opérations définies par

$$(f \odot g)(n) = \min(f(n), g(n)),$$

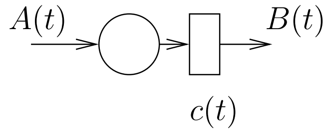
$$(f \star g)(n) = \min_{0 \leq k \leq n} f(k) + g(n-k).$$

Question 1. Montrer que $\odot$ et $\star$ sont des lois internes. Montrer que $(\mathcal{F}, \odot, \star)$ est un semi-anneau idempotent. En particulier, on précisera les éléments neutres des deux lois.

Question 2. On définit $f^i = f \star \cdots \star f$ (i fois) et $f^* = \odot_{i=0}^{\infty} f^i$. Montrer que f^* appartient à $\mathcal{F}$.

Question 3. Une suite dans $\mathcal{F}$ est sous-additive si pour tout n et m, $f(n+m) \leq f(n) + f(m)$. Montrer que f^* est sous-additive si $f \in \mathcal{F}$. Soit $f \in \mathcal{F}$. Montrer que $[f$ sous-additive, $f(0) = 0]$ $\iff$ $[f^* = f]$.

Question 4. Si f n'est pas sous-additive, montrer que f^* est la plus grande fonction sous-additive valant 0 en 0 et bornée supérieurement par f.



Question 5. On considère le réseau de Petri ci-dessus. Le temps est discret: $t \in \mathbb{N}$. Soit $A(t)$ le nombre total de jetons arrivés jusqu'à l'instant t. Soit $B(t)$ le nombre total de jetons sortis jusqu'à l'instant t. Soit $c(t)$ la capacité de service, c'est à dire le nombre de jetons que le serveur peut servir au maximum à l'instant t. (Le service est supposé instantané et les jetons servis sortent à l'instant t.) On pose par convention $A(0) = 0$ et $c(0) = 0$.

Par exemple, si $A(0) = 0, A(1) = 2, A(2) = 4, A(3) = 10$ et si $c(0) = 0, c(1) = 1, c(2) = 5, c(3) = 1$ alors : $B(0) = 0, B(1) = 1, B(2) = 4, B(3) = 5$.

Montrer que s'il existe $f \in \mathcal{F}$ telle que $\sum_{t=u}^{v} c(t) \geq f(v-u)$ pour tout u, v alors pour tout $t \in \mathbb{N}$, $B(t) \geq (A \star f)(t)$. Indication: considérer le dernier instant $s \leq t$ où la place est vide.