Exercice 1 : Courbes de service

On rappellel qu' un server admet une *courbe de service* $g(t)$ si le processus cumulé des sorties $D(t)$ est lié au processus cumulé des entrées $A(t)$ par la relation : $D(t) \geq \inf_{0 \leq s \leq t} A(s) + g(t-s), \forall t \geq 0$.

Un server admet une *courbe de service stricte* $h(t)$ si $D(t) \geq A(s_0) + h(t - s_0), \forall t \geq s_0$, avec s_0 le plus grand instant avant t tel que le serveur est vide ($D(s_0) = A(s_0)$).

1. Montrer qu'une courbe de service stricte est une courbe de service.
2. Montrer qu'il existe toujours une courbe de service stricte maximale (que l' on peut appeler le sup des courbes de service stricte).
3. Est-ce vrai dans le cas pour les courbes de service non nécessairement stricte ?
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = 0$ si $x \leq 3$ et $h(x) = +\infty$ sinon. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = 2x + 1$.
   - Calculer une fonction qui régule les sorties d'un serveur qui admet h comme fonction de service et g comme fonction d'arrivée.
   - Faire de même si le serveur admet h comme fonction de service strict.
   - Pouvez donner une interprétation dans les deux cas du type de serveur modélisé par ces courbes de service.

Exercice 2 : calcul des délais

Une bande B est la zone de R^2 délimitée par deux droite parallèles. Sa largeur $W(B)$ est la distance euclidienne entre les droites. Sa pente $\lambda(B)$ est celle des droites qui la délimitent. Voir la figure 1.

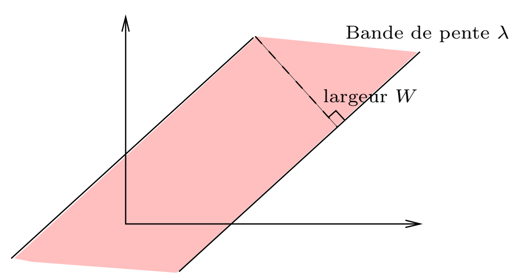

Fig. 1 – Une bande

On considère par la suite, un serveur avec une courbe de service $g(t)$ convexe, affine par morceaux, servant un processus d'arrivées régulé par une courbe d'arrivée $f(t)$ concave, affine par morceaux avec $g(0) = f(0) = 0$ et il existe un unique temps T tel que $f(T) = g(T)$. On appelle D_{max} une borne sur le delai maximal dans le serveur, la distance maximale horizontale entre f et g. On appelle C_{max} une borne sur le nombre maximal de paquets dans le buffer du serveur. C'est la distance verticale entre f et g. Voir la figure 2. Une bande B englobe f et g si pour tout $0 \leq t \leq T, f(t) \in B, g(t) \in B$.

1. Montrer que $D_{max} = \min_{\{B \text{ englobante}\}}(\sqrt{1 + \lambda(B)^2} W(B))$
2. Montrer qu'il existe une bande qui atteint le minimum dont la pente est une des pentes de f ou une des pentes de g.
3. Montrer que $C_{max} = \min_{\{B \text{ englobante }\}}(\frac{\sqrt{1+\lambda(B)^2}}{\lambda(B)} W(B))$.
4. Montrer que la valeur de la projection orthogonale d'un segment S de pente r de longueur ℓ dans la direction λ est :

$$proj_\lambda(S) = \frac{\lambda - r}{\sqrt{1 + \lambda^2}\sqrt{1 + r^2}} \ell.$$

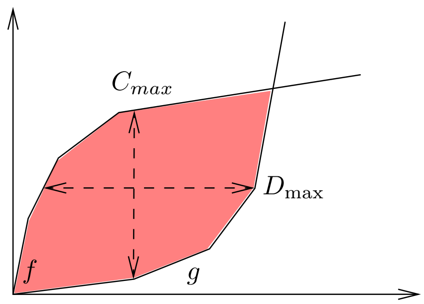

FIG. 2 – Forme des courbes d'arrivées et de service

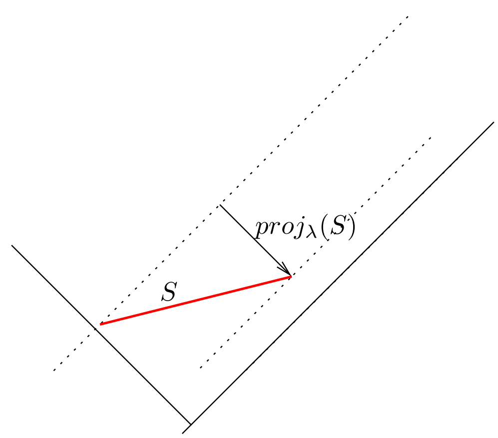

FIG. 3 – Projection d'un segment

(voir la Figure 3 pour la définition : remarquez que la projection est un nombre réel qui peut prendre des valeurs négatives).

5. Donner une formule pour calculer D_{max} et une formule pour V_{max} qui fait intervenir l'opérateur min et la formule des projections des segments composant f et g (le max est interdit).