

# Examen MPRI 2-17

## Fondements sur la modélisation des réseaux

20 novembre 2009

*Seules les notes de cours sont autorisées.*

### 1 Modèle de particules dures

On considère  $K$  sites ou emplacements arrangés suivant une ligne. Chaque site peut être occupé par 0 ou 1 particule. Par ailleurs la taille des particules interdit d'en avoir 2 côte-à-côte. Les configurations autorisées peuvent donc être codées comme les éléments de l'ensemble

$$E = \{(u_i)_i \in \{0, 1\}^K \mid \forall i < K, u_i u_{i+1} = 0\}.$$

Par exemple pour  $K = 5$ , on a  $10100 \in E$  et  $10110 \notin E$ .

Les particules arrivent au site  $i$  suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda_i$ . Les différents processus de Poisson sont indépendants. Une particule arrivant sur un site déjà occupé ou interdit (car voisin d'un site occupé) disparaît. Une particule acceptée en un site reste pendant un temps exponentiel de paramètre 1.

- Q1. Montrer que l'on peut représenter le modèle par un processus de Markov sur l'espace d'états  $E$ , dont on précisera le générateur infinitésimal.
- Q2. Montrer que l'on peut interpréter le modèle comme un réseau à perte (loss network).
- Q3. Soit  $d_i$  le *débit* au site  $i$  à l'équilibre, c'est-à-dire le nombre moyen de départs par unité de temps. Exprimer  $d_i$  en fonction de  $\pi$ , la mesure stationnaire du processus.
- Q4. Supposons que  $K = 3$  et que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ . Calculer  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ .
- Q5. Montrer que l'on peut choisir  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  de façon à rétablir l'équité entre sites, c'est-à-dire :  $d_1 = d_2 = d_3$ .
- Q6. On considère maintenant le modèle avec  $K$  sites et  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ . On pose

$$Z_{-1} = 1, Z_0 = 1, \forall i \geq 1, Z_i = Z_{i-1} + \lambda Z_{i-2}.$$

Montrer que le débit au site  $i$  est donné par

$$d_i = \lambda \frac{Z_{i-2} Z_{K-i-1}}{Z_K}.$$

**Indication:** Voir  $Z_i$  comme la constante de normalisation du modèle à  $i$  sites.

### 2 Routeurs

Une *fonction de routage*  $P$  est une application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant  $P(u) \leq u$  pour tout  $u$ . Un nœud est appelé *routeur* avec fonction de routage  $P$  si pour toute fonction d'arrivée de paquets  $A(t)$ , sa sortie est  $B(t) = P(A(t))$ .

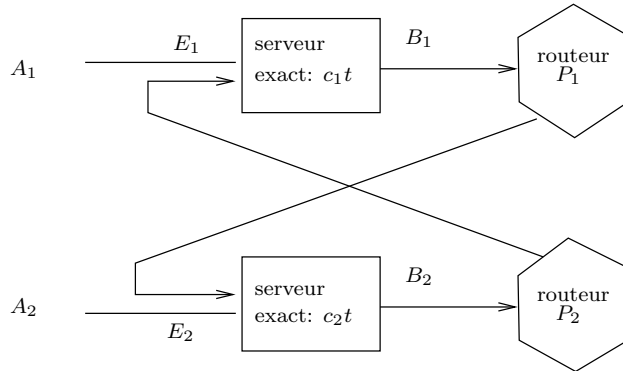


Figure 1: un réseau routé

Q1. Montrer que si  $P$  est régulée par  $h(t) = \delta + \gamma t$ , et si  $A$  est régulée par  $\sigma + \rho t$ , alors  $B$  est régulée par  $\gamma\sigma + \delta + \gamma\rho t$ .

On considère par la suite le réseau de la figure 1. Les deux serveurs sont des serveurs *exacts* avec comme courbe de service:  $g_1(t) = c_1 t$  et  $g_2(t) = c_2 t$ . Les arrivées de paquets  $A_1(t)$  et  $A_2(t)$  sont régulées respectivement par  $\sigma_1 + \rho_1 t$  et  $\sigma_2 + \rho_2 t$ . Les routeurs  $P_1$  et  $P_2$  sont régulés respectivement par  $\delta_{12} + \gamma_{12} t$  et  $\delta_{21} + \gamma_{21} t$ .

Q2. Si on suppose que les flux de sorties des serveurs  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$  sont régulés respectivement par  $s_1 + q_1 t$  et  $s_2 + q_2 t$ , calculer une régulation pour  $E_1(t)$  et  $E_2(t)$ , les flux d'entrées dans les serveurs.

Q3. En déduire des équations satisfaites par  $s_1, s_2, q_1$  et  $q_2$  si  $c_1$  et  $c_2$  sont assez grand, et les calculer.

Q4. À quelles conditions les buffers dans les deux serveurs restent -ils bornés?

Q5. On généralise à un réseaux quelconque avec  $N$  serveurs de courbe de service exacte  $c_i$  pour le serveur  $i$ , des arrivées des paquets dans le serveur  $i$  selon un flux régulé par  $\sigma_i + \rho_i t$  et des routeurs en sortie des serveurs qui routent les paquets de  $i$  vers  $j$  pour tout  $i$  et tout  $j$  avec une régulation de routage qui vaut  $\delta_{ij} + \gamma_{ij} t$ .

À quelle condition les buffers restent-ils tous finis? Commenter le résultat.

### 3 Marche aléatoire sur un graphe

On considère un graphe fini non-orienté  $G$  connexe, sans boucles ni multi-arêtes. On note  $V$  l'ensemble des sommets,  $E$  l'ensemble des arêtes et  $d_i$  le degré du sommet  $i$ .

#### Marcheur aléatoire

Le marcheur aléatoire se déplace sur le graphe de la manière suivante : à chaque pas, il passe d'un sommet  $i$  au sommet suivant avec une probabilité uniforme sur tous les voisins de  $i$ .

Soit  $X_n \in V$  la position du marcheur aléatoire après  $n$  pas.

Q1. Montrer que  $(X_n)_n$  est une chaîne de Markov irréductible.

Q2. Montrer que la chaîne est réversible. Calculer sa probabilité stationnaire.

## Marcheur biaisé

On considère maintenant le même graphe avec des récompenses sur les arêtes. L'arête  $\{i, j\}$  à une pondération  $w_{ij} > 0$ . Les pondérations des arcs sont toutes différentes. On note  $W$  la somme de toutes les pondérations. La marche aléatoire biaisée sur le graphe pondéré est définie comme suit : le marcheur passe du sommet  $i$  au sommet voisin  $j$  avec probabilité  $w_{ij} / \sum_k \text{voisin de } i w_{ik}$ .

Q3. Calculer la probabilité stationnaire de la nouvelle marche aléatoire.

Q4. Si le marcheur passe de l'état  $X_n = i$  à l'état  $X_{n+1} = j$ , il touche une récompense instantanée  $r(n) = w_{ij}$ . Le *bénéfice moyen* est défini par  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r(n)$ .

Calculer en fonction de  $W$  et de  $|E|$  le bénéfice moyen pour le marcheur aléatoire de la question 1. On le notera  $a$ . Calculer le bénéfice moyen pour le marcheur biaisé. On le notera  $b$ .

## Marcheur clairvoyant

On garde le même graphe valué mais on considère maintenant un marcheur clairvoyant qui cherche à réaliser un bénéfice *maximal*.

Q5. Soit  $C(n)_i$  le bénéfice maximal d'un marcheur clairvoyant partant du sommet  $i$  et réalisant  $n$  déplacements. Montrer que  $C(n)$  vérifie une équation max-plus linéaire de la forme  $C(n) = A^n \otimes u$ , où  $A$  est une matrice et  $u$  un vecteur colonne, que l'on déterminera explicitement.

Q6. Montrer que le bénéfice maximal,  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} C_i(n)/n$ , existe et ne dépend pas de  $i$  et le calculer en fonction des  $w_{ij}$ .

## Marcheur myope

Toujours sur le même graphe valué, on considère maintenant un marcheur myope. Celui-ci maximise son bénéfice instantané à chaque pas (il choisit l'arête avec la récompense maximale).

Q7. Calculer le bénéfice moyen par pas,  $m_i$ , du marcheur myope en fonction de son point de départ,  $i$ .

Q8. Comparer les bénéfices de tous les marcheurs.

**Indication.** Pour comparer  $a$  et  $b$  on pourra utiliser l'inégalité de Jensen : si  $f$  est une fonction convexe et  $X$  une variable aléatoire réelle positive, alors  $\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$ .