

Réseaux max-plus

Notes de cours MPRI 2-17, 2007-08

Jean MAIRESSE *

February 8, 2008

Contents

1	Introduction	2
2	Modèle de Tetris et extensions	3
2.1	Des ateliers de production aux modèles de Tetris	3
2.2	Des modèles de Tetris aux automates max-plus	6
2.3	Monoïdes de trace	10
2.4	Réseaux de Petri	12
2.5	Mise en perspective	18
2.6	Graphes d'événements	18
2.7	Applications topicales	22
2.8	Files d'attente Markoviennes	28
3	Evaluation de performances	33
3.1	Sous-additivité et existence du vecteur spectral	33
3.2	Calcul du vecteur spectral	36
3.2.1	Applications max-plus	36
3.2.2	Applications min-max-plus et topicales	47
3.2.3	Maximisation des systèmes max-plus	49

*LIAFA, CNRS-Université Paris 7, case 7014, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. E-mail: Jean.Mairesse@liafa.jussieu.fr

Remerciements

Ce support de cours est un extrait remanié de deux chapitres de mon mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, soutenue en novembre 2006 [52]. Pour cette HDR, et par ricochet pour ce support, j'ai profité de nombreux encouragements, conseils, corrections. Je remercie tout particulièrement :

- les rapporteurs : Christian Choffrut, Volker Diekert, Philippe Flajolet et Yves Guivarc'h;
- les membres du jury : François Baccelli, Mireille Bousquet-Mélou, Vadim Kaimanovich et Jean-François Le Gall;
- les relecteurs bénévoles : Mathilde Bouvel, Ines Klimann et Glenn Merlet.

1 Introduction

Les *systèmes* conçus par l'homme (systèmes informatiques ou de production, réseaux de communication ou de transport) sont de nature très différente des systèmes physiques classiques. Ils obéissent à des règles opérationnelles, ou algorithmes, et les transformations ont lieu à des instants *discrets*, en réponse à des *événements* ponctuels. Le terme de *systèmes à événements discrets* s'est imposé pour décrire de tels systèmes. Comprendre les mécanismes qui régissent ces systèmes est un enjeu important. Dans ce contexte et en amont, la première étape consiste à proposer des modèles mathématiques pertinents. Un bon modèle est celui qui réalise un compromis entre puissance de modélisation et capacité d'analyse mathématique exacte. C'est ce compromis réussi qui a engendré par exemple le succès de la théorie classique des files d'attente Markoviennes, ou encore celui des réseaux de Petri.

On s'intéresse dans ce document à un ensemble de modèles de SED construits autour du semi-anneau max-plus. Le modèle de Tetris joue le rôle de fil rouge. Il constitue un paradigme pour les différents modèles de systèmes à événements discrets qui vont nous intéresser. Ces derniers peuvent se voir comme des spécialisations, variations ou extensions du modèle de Tetris.

2 Modèle de Tetris et extensions

Ce chapitre est consacré à la présentation d'une suite de modèles mathématiques apparaissant dans l'étude des systèmes à événements discrets. Le modèle de Tetris joue le rôle du pivot autour duquel viennent s'articuler tous les autres modèles.

2.1 Des ateliers de production aux modèles de Tetris

Soit un modèle d'atelier de production constitué de :

- trois machines : M_0, M_1, M_2 ;
- quatre tâches élémentaires : a_0, a_1, b_0, b_1 ;
- deux gammes de produit : $J_a = a_0 a_1, J_b = b_0 b_1$.

La notation $J_a = a_0 a_1$ signifie que pour fabriquer un exemplaire de l'objet J_a , il faut réaliser les tâches élémentaires a_0 puis a_1 , la tâche a_1 ne pouvant commencer qu'après achèvement de la tâche a_0 . Par ailleurs, chaque tâche élémentaire doit être exécutée par une machine spécifique, pendant une durée donnée, et chaque machine ne peut traiter qu'une tâche élémentaire à la fois. Enfin, il faut terminer la fabrication d'un objet J_i , avant d'entamer la fabrication d'un autre objet de la même gamme J_i .

Le tableau précise la machine associée à chaque tâche, ainsi que la durée d'exécution. Ici, $\ell_a \in \mathbb{R}_+$ et $\ell_b \in \mathbb{R}_+$ sont deux paramètres du modèle.

<i>Tâche</i>	a_0	a_1	b_0	b_1
<i>Machine</i>	M_1	M_0	M_1	M_2
<i>Durée</i>	1	ℓ_a	1	ℓ_b

La question est celle de l'*ordonnancement* : étant donné un carnet de commandes ($n_a \in \mathbb{N}$ exemplaires de l'objet J_a et $n_b \in \mathbb{N}$ exemplaires de l'objet J_b), comment choisir l'ordre de passage des tâches sur les machines de façon à minimiser le temps d'exécution ?

On spécifie un ordonnancement sous la forme d'un mot $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ sur l'alphabet $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. À l'instant 0, on commence l'exécution de la tâche w_0 , puis l'exécution de la tâche w_1 commence au plus tôt, étant données les contraintes, etc.

Considérons par exemple le carnet de commande [$n_a = 2, n_b = 1$]. En prenant en compte les contraintes ("jamais plus d'un exemplaire d'un objet de chaque gamme en cours de fabrication", " a_0 avant a_1 " et " b_0 avant b_1 "), on obtient tous les ordonnancements possibles (III est le produit de mélange, "shuffle" en anglais, des combinatoriciens des mots) :

$$a_0 a_1 a_0 a_1 \text{ III } b_0 b_1 = \{a_0 a_1 a_0 a_1 b_0 b_1, a_0 a_1 a_0 b_0 a_1 b_1, a_0 a_1 a_0 b_0 b_1 a_1, \\ a_0 a_1 b_0 a_0 a_1 b_1, \dots, b_0 b_1 a_0 a_1 a_0 a_1\}.$$

Visualisons un ordonnancement à l'aide d'un *diagramme de Gantt* particulier. On considère une suite de colonnes indicées par M_1, J_a, M_0, J_b, M_2 (les *ressources*). Chaque tâche élémentaire est représentée par un bloc rigide ou *pièce*, occupant les deux colonnes correspondant à sa machine et à sa gamme, et de hauteur sa durée d'exécution. À un ordonnancement, on associe donc une suite de pièces qui, soumises à la gravité, s'empilent suivant le principe du jeu de TETRIS. La durée d'exécution de w est la hauteur de l'empilement associé, on la note $h(w)$.

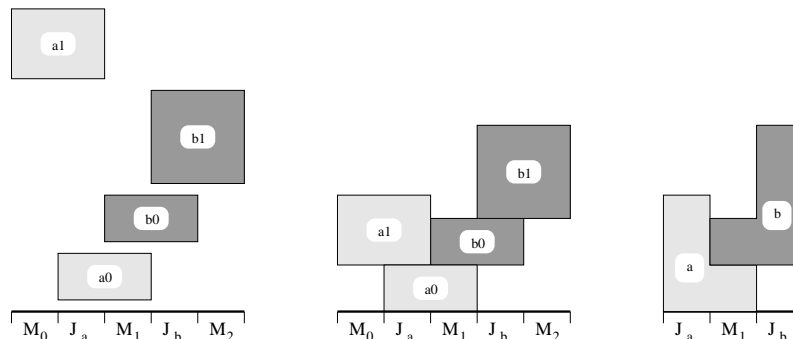


Figure 1: L'empilement associé au mot $a_0b_0b_1a_1$.

En illustration, on a représenté, en figure 1, l'empilement associé à l'ordonnancement $w = a_0b_0b_1a_1$. On a ici $\ell_a = 3/2, \ell_b = 2$ et $h(w) = 4$.

La contrainte “jamais plus d'un exemplaire ...” a pour conséquence qu'une pièce de type a_1 , resp. b_1 , repose toujours sur une pièce de type a_0 , resp. b_0 , dans l'empilement. On peut dès lors fusionner les pièces a_0 et a_1 , resp. b_0 et b_1 , et obtenir un modèle équivalent avec seulement deux pièces a et b . En supprimant la première et la dernière colonne, on obtient une représentation simplifiée du même modèle avec trois ressources et deux pièces. La simplification est illustrée en figure 1. Ce dernier modèle sera réutilisé à de multiples reprises.

Remarque. La tradition en recherche opérationnelle veut plutôt que le diagramme de Gantt soit représenté à l'aide d'un sous-ensemble des ressources constitué soit des machines soit des gammes. On obtient alors des empilements où certaines pièces “flottent” dans les airs. Pour la suite des développements, il est essentiel que les pièces soient soumises à la gravitation, et donc de considérer toutes les ressources simultanément.

Proposons une définition formelle d'un modèle de Tetris général.

Définition 2.1. *Un modèle de Tetris est un quintuplet $\mathcal{H} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, R, l, u)$ dans lequel*

- \mathcal{T} est un ensemble fini dont les éléments sont appelés pièces;

- \mathcal{R} est un ensemble fini dont les éléments sont appelés colonnes;
- $R : \mathcal{T} \rightarrow 2^{\mathcal{R}}$ donne le sous-ensemble des colonnes occupées par une pièce;
- $l = (l(a))_{a \in \mathcal{T}}$, $l(a) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ donne la hauteur du contour inférieur de la pièce a pour les différentes colonnes;
 $u = (u(a))_{a \in \mathcal{T}}$, $u(a) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (avec $u(a) \geq l(a)$) donne le contour supérieur de la pièce.

On suppose de plus :

- $\min_{r \in R(a)} l(a)_r = 0$ (en particulier, $R(a) \neq \emptyset$);
- $r \notin R(a) \iff l(a)_r = -\infty \iff u(a)_r = -\infty$.

Par exemple, le modèle de la figure 1 (droite), est un modèle de Tetris $\mathcal{H} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, R, l, u)$ avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &= \{a, b\}, \quad \mathcal{R} = \{J_a, M_1, J_b\}, \quad R(a) = \{J_a, M_1\}, \quad R(b) = \{M_1, J_b\}, \\
 l(a) &= [0, 0, -\infty], \quad u(a) = [1 + \ell_a, 1, -\infty], \\
 l(b) &= [-\infty, 0, 0], \quad u(b) = [-\infty, 1, 1 + \ell_b].
 \end{aligned} \tag{1}$$

Commentaires et bibliographie.

Le modèle de Tetris peut s'avérer pertinent dans plusieurs contextes. Tout d'abord on peut le voir comme un modèle tâche-ressource, dans la lignée de l'atelier de production décrit ci-dessus. Les colonnes sont les ressources, les pièces sont les tâches, et la forme de la pièce traduit les durées d'utilisation des ressources. Cette modélisation a été proposée simultanément par Brillman & Vincent [13] et Gaubert & M. [31].

On peut également utiliser Tetris pour représenter certains modèles physiques d'accumulation, par exemple l'amoncellement de flocons de neige le long d'une vitre, voir la discussion sur le modèle d'Eden dans Barabasi & Stanley [4, Chap. 8].

Les animaux dirigés constituent une troisième incarnation de Tetris [12, 22, 74]. Étant donné un graphe orienté et un nœud distingué o , un *animal dirigé* est un ensemble E de nœuds tel que tout élément de E peut être joint depuis o par un chemin orienté dont tous les nœuds sont dans E . Les animaux dirigés sont un modèle pertinent en percolation et en physique des polymères. Les animaux dirigés sur les réseaux carrés ou triangulaires peuvent être vus comme des empilements de Tetris particuliers.

2.2 Des modèles de Tetris aux automates max-plus

Revenons sur le modèle de Tetris défini en (1). Posons $h_a = \ell_a + 1$ et $h_b = \ell_b + 1$. Le contour supérieur d'un empilement peut être représenté par trois nombres, x, y, z , qui sont les hauteurs des trois colonnes, de la gauche vers la droite. Lorsqu'on ajoute la pièce a , respectivement b , le contour supérieur devient

$$T_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(x, y) + h_a \\ \max(x, y) + 1 \\ z \end{pmatrix}, \text{ resp. } T_b \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \max(y, z) + 1 \\ \max(y, z) + h_b \end{pmatrix} \quad (2)$$

On a ainsi défini deux applications $T_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $T_b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ce sont des exemples d'applications max-plus, voir section 2.7. Si la forme du sol est $\mathbf{o} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, le profil supérieur de l'empilement $w = w_0 \cdots w_{n-1}$, $w_i \in \{a, b\}$, est donné par

$$T_{w_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{w_1} \circ T_{w_0}(\mathbf{o}). \quad (3)$$

La dynamique de ce modèle de Tetris se représente donc par un système itéré d'applications de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

On peut par ailleurs réinterpréter (2) et (3) comme définissant des produits matrices-vecteurs de type particulier. On a

$$T_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_a & h_a & -\infty \\ 1 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$T_b \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & h_b & h_b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

et, en notant respectivement $M(a)$ et $M(b)$ les deux matrices apparaissant ci-dessus, on a

$$T_{w_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{w_1} \circ T_{w_0}(\mathbf{o}) = M(w_{n-1}) \otimes \cdots \otimes M(w_1) \otimes M(w_0) \otimes \mathbf{o}. \quad (6)$$

Dans (4), (5) et (6), le symbole \otimes doit s'interpréter comme suit. Si A et B sont deux matrices à coefficients dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et de tailles compatibles, alors $A \otimes B$ est la matrice de coefficients $(A \otimes B)_{ij} = \max_k [A_{ik} + B_{kj}]$. L'addition étant distributive par rapport au maximum, ceci définit un produit associatif \otimes , d'où l'absence de parenthèses dans (6).

Enfin, on peut représenter graphiquement le triplet $(\mathbf{o}, M(a), M(b))$ à l'aide de l'automate de la figure 2.

Il s'agit d'un automate à deux bandes : la bande d'entrée étiquetée dans $\{a, b\}$ et la bande de sortie pondérée dans \mathbb{R} . Soit w un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$. Soit $h(w)_i$ le maximum sur tous les chemins étiquetés par w et

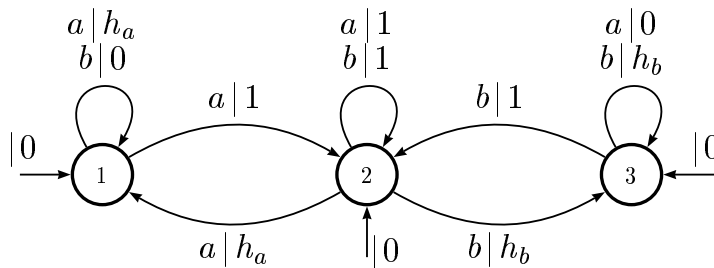


Figure 2: Automate associé au modèle de Tetris de la fig. 1.

terminant dans l'état $i \in \{1, 2, 3\}$ de la somme des poids le long du chemin. En suivant l'interprétation combinatoire du produit matriciel, on obtient que $h(w)_i$ est égal au membre droit de l'égalité (6). En utilisant (3), on en déduit que $h(w)_i$ est la hauteur de l'empilement w sur la colonne i . L'automate de la figure 2 est un automate max-plus, voir déf. 2.5.

On propose maintenant un énoncé formel des principes ci-dessus, pour tout modèle de Tetris et dans le cadre des automates max-plus.

Définition 2.2. *Un semi-anneau est un ensemble \mathbb{K} muni de deux lois internes, l'une dite additive qui est associative et commutative et possède un élément neutre $0_{\mathbb{K}}$, l'autre dite multiplicative qui est associative et possède un élément neutre $1_{\mathbb{K}}$. La loi multiplicative est distributive par rapport à la loi additive, et $0_{\mathbb{K}}$ est élément absorbant pour la multiplication.*

Définition 2.3. *Le semi-anneau max-plus, noté \mathbb{R}_{\max} , est le semi-anneau formé de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et des lois \max et $+$. Le semi-anneau min-plus, noté \mathbb{R}_{\min} , est le semi-anneau formé de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et des lois \min et $+$. On définit de façon analogue les sous-semi-anneaux \mathbb{Z}_{\max} , \mathbb{N}_{\min} , etc.*

Pour deux matrices A et B de tailles compatibles et à coefficients dans le semi-anneau \mathbb{K} , on définit les matrices $A + B$ et AB de façon usuelle. L'ensemble $\mathbb{K}^{n \times n}$ muni de ces deux lois est un semi-anneau.

On observe que pour le semi-anneau max-plus, la loi additive est le \max et la loi multiplicative est le $+$. On a $0_{\mathbb{R}_{\max}} = -\infty$ et $1_{\mathbb{R}_{\max}} = 0$. On observe aussi que $\max(a, a) = a$, on dit que \mathbb{R}_{\max} est un semi-anneau idempotent. On notera parfois les opérations matricielles par $A \otimes B$, au lieu de AB , pour signifier que le semi-anneau sous-jacent est \mathbb{R}_{\max} .

Définition 2.4. *Soit \mathbb{K} un semi-anneau et Q et Σ deux ensembles finis et non-vides. Un \mathbb{K} -automate ou automate à multiplicités dans \mathbb{K} d'ensemble*

d'états Q et d'alphabet Σ est un triplet (α, μ, β) , où α , resp. β , est un vecteur ligne, resp. colonne, de \mathbb{K}^Q , et où μ est un morphisme de Σ^* dans $\mathbb{K}^{Q \times Q}$ (pour $u = u_1 u_2 \cdots u_n$, $u_i \in \Sigma$, $\mu(u) = \mu(u_1) \mu(u_2) \cdots \mu(u_n)$). La série reconnue par (α, μ, β) est la série $S : \Sigma^* \rightarrow K$ telle que $\langle S, \cdot \rangle = \alpha \mu(\cdot) \beta$.

Définition 2.5. Un automate max-plus, resp. min-plus, est un automate à multiplicités dans \mathbb{R}_{\max} , resp. \mathbb{R}_{\min} .

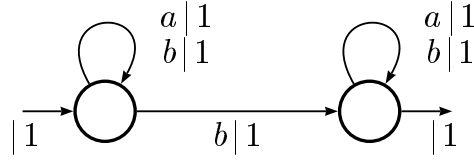


Figure 3: Automate à multiplicités.

Un \mathbb{K} -automate se représente graphiquement par un graphe orienté dont les arcs sont étiquetés dans Σ et pondérés dans \mathbb{K} , avec des états initiaux et terminaux pondérés dans \mathbb{K} . Plus précisément, l'ensemble des états est Q ; pour tout $(p, q) \in Q^2$, $a \in \Sigma$, si $\mu(a)_{pq} \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors il y a un arc de p vers q étiqueté par a et pondéré par $\mu(a)_{pq}$; pour tout $p \in Q$, si $\alpha_p \neq 0_{\mathbb{K}}$ (resp. $\beta_p \neq 0_{\mathbb{K}}$), alors p est un état *initial* (resp. *terminal*) de poids α_p (resp. β_p).

On transfère la terminologie de la théorie des graphes vers les \mathbb{K} -automates (chemin, circuit, etc). L'*étiquette* d'un chemin est la concaténation des étiquettes des arcs qui le compose. Un chemin qui commence dans un état initial et finit dans un état terminal est un chemin *réussi*. Le *poids* d'un chemin réussi est le produit (dans \mathbb{K}) du poids initial, des poids des arcs et du poids terminal. Le *poids* d'un mot $w \in \Sigma^*$ est la somme (dans \mathbb{K}) des poids des chemins réussis d'étiquette w , et vaut $0_{\mathbb{K}}$ s'il n'existe aucun chemin réussi d'étiquette w . Le poids de w est égal à $\langle S, w \rangle = \alpha \mu(w) \beta$.

Pour illustration, considérons l'automate de la fig. 3 et appelons S la série reconnue. Si on interprète l'automate dans le semi-anneau de Boole $\mathbb{B} = (\{\text{Faux} = 0, \text{Vrai} = 1\}, \text{ou}, \text{et})$, alors S est la série caractéristique du langage $A^* b A^*$. Si au contraire le semi-anneau sous-jacent est $(\mathbb{N}, +, \times)$, alors $\langle S, w \rangle = |w|_b$. Enfin si on voit l'automate comme un automate max-plus, on a $\langle S, w \rangle = |w| + 2$ si $w \in A^* b A^*$ et $\langle S, w \rangle = -\infty$ sinon.

Remarque. Un automate classique peut être vu comme un *automate booléen*, c'est-à-dire un automate à multiplicités sur le semi-anneau de Boole $\mathbb{B} = (\{\text{Faux}, \text{Vrai}\}, \text{ou}, \text{et})$. On constate que \mathbb{B} est isomorphe à $(\{-\infty, 0\}, \max, +)$, et peut donc être vu comme un sous-semi-anneau de \mathbb{R}_{\max} . En particulier, les automates classiques s'identifient aux automates

max-plus dans lesquels les coefficients différents de $-\infty$ sont égaux à 0. On utilisera cette remarque à plusieurs reprises (§2.4 et §3.2.3).

On dispose maintenant du bon formalisme pour énoncer le résultat.

Théorème 2.6. *Soit le modèle de Tetris $\mathcal{H} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, R, l, u)$ et soit \mathbf{s} le vecteur ligne de $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ codant la forme du sol. Pour i dans \mathcal{R} , soit δ_i le vecteur colonne de $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^{\mathcal{R}}$ défini par $(\delta_i)_i = 0$ et $(\delta_i)_j = -\infty, j \neq i$. Soit $\mathcal{M} : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{\mathcal{R} \times \mathcal{R}}$ le morphisme défini par*

$$\forall a \in \mathcal{T}, \forall s, r \in \mathcal{R}, \quad \mathcal{M}(a)_{sr} = \begin{cases} 0 & \text{si } s = r \notin R(a), \\ u(a)_r - l(a)_s & \text{si } r \in R(a), s \in R(a), \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

La série $\mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\max}, w \mapsto h(w)_i$, qui à un mot associe la hauteur de l'empilement sur la colonne i , est reconnue par l'automate max-plus $(\mathbf{s}, \mathcal{M}, \delta_i)$. La série $\mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\max}, w \mapsto h(w)$, qui à un mot associe la hauteur totale de l'empilement, est reconnue par l'automate max-plus $(\mathbf{s}, \mathcal{M}, \mathbf{o})$, où $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)^T$.

En rajoutant les états terminaux à l'automate de la fig. 2, on obtient l'automate max-plus associé au modèle de Tetris de la fig. 1 (droite). (Les matrices $\mathcal{M}(a)$ et $\mathcal{M}(b)$ de l'automate de la fig. 2 sont les transposées des matrices définies en (4)-(5). En effet, on lit les mots de la gauche vers la droite dans un automate, alors qu'on compose les applications de la droite vers la gauche dans un système itéré de fonctions.) On obtient par exemple

$$h(ab) = (0 \ 0 \ 0) \otimes \begin{pmatrix} h_a & 2 & 1 + h_b \\ h_a & 2 & 1 + h_b \\ -\infty & 1 & h_b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \max(h_a, 2, 1 + h_b),$$

et on retrouve que $h(ab) = 4$ pour les valeurs numériques $h_a = 5/2, h_b = 3$, de la figure 1.

Notes bibliographiques et terminologiques.

Le théorème 2.6 est démontré sous deux formes voisines dans Gaubert & M. [31] et Brilman & Vincent [13].

Pour plus de détails sur la théorie générale des automates à multiplicités, on peut consulter [6, 26, 47]. Il existe des motivations variées pour s'intéresser spécifiquement aux automates max-plus et min-plus. En plus de la modélisation des empilements de Tetris, ils surgissent en reconnaissance automatique de la parole [57], ou dans la résolution de certaines questions (hauteur d'étoile, propriété de puissance finie) sur les langages rationnels [41, 44, 70, 61].

Terminons par quelques considérations de terminologie. Les automates max-plus et min-plus sont affublés de divers noms dans la littérature : automates à distance, automates à coût, automates des financiers. Quant aux semi-anneaux max-plus et min-plus, ils sont souvent désignés par l'appellation “semi-anneaux tropicaux”; illustration : la récente mais très active “géométrie algébrique tropicale” [63]. Dans les années 1980-90, “semi-anneau tropical” était réservé à \mathbb{N}_{\min} , le nom ayant été proposé par C. Chofrut (ou D. Perrin, les avis des historiens divergent sur ce point) en référence et hommage au Brésil d’Imre Simon.

2.3 Monoïdes de trace

Considérons les mots finis sur l’alphabet à trois symboles $\{a, b, c\}$. On suppose que les lettres a et b commutent et on identifie deux mots si on peut passer de l’un à l’autre par commutations successives de lettres a et b adjacentes. Ceci définit une relation d’équivalence sur les mots, dont les classes d’équivalence sont appelées des *traces*. Par exemple, $t = \{aabcb, abacb, baacb\}$ est une trace.

La relation d’équivalence est compatible avec la concaténation. Ceci permet de parler de la concaténation de deux traces, et donc d’équiper l’ensemble des traces d’une structure de monoïde. On vient de définir un *monoïde de trace* particulier.

À la suite de Viennot [75], visualisons les traces par des empilements de pièces. Soit le modèle de Tetris (déf. 2.1) constitué des colonnes $\{1, 2\}$, et des pièces a, b et c , rectangulaires de hauteur un, et occupant les emplacements $R(a) = \{1\}, R(b) = \{2\}$ et $R(c) = \{1, 2\}$.

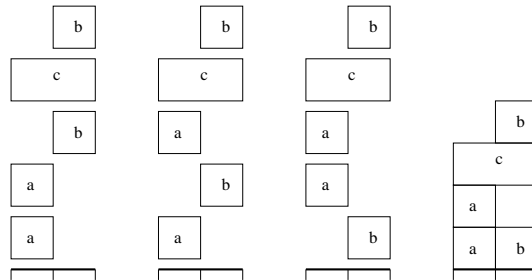


Figure 4: De gauche à droite, les mots $aabcb$, $abacb$, $baacb$ et la trace associée.

Deux mots sont équivalents, c’est-à-dire correspondent à la même trace, si et seulement si les empilements de Tetris associés sont identiques. On illustre ceci en figure 4. La concaténation de deux traces correspond à la superposition des empilements correspondants.

On propose maintenant une définition formelle des monoïdes de trace.

Étant donné un ensemble non-vide A , on rappelle que le *monoïde libre* A^* est le monoïde constitué de l'ensemble des mots finis sur l'alphabet A avec la concaténation comme loi interne.

Définition 2.7. Soit Σ un ensemble fini non-vide. Le monoïde présenté par Σ et $R \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ est le quotient du monoïde libre Σ^* par la plus petite congruence contenant les relations $u \sim v, (u, v) \in R$. On le note $\langle \Sigma \mid u = v, (u, v) \in R \rangle^+$.

Définition 2.8. Soit Σ un ensemble fini non-vide. Soit $I \subset \Sigma \times \Sigma$ une relation anti-réflexive et symétrique, appelée relation d'indépendance ou de commutation. Le monoïde de trace $\mathcal{M}(\Sigma, I)$ est défini par la présentation de monoïde

$$\mathcal{M}(\Sigma, I) = \langle \Sigma \mid ab = ba, \forall (a, b) \in I \rangle^+. \quad (8)$$

Les éléments de $\mathcal{M}(\Sigma, I)$ sont appelés des traces. On appelle $D = \Sigma \times \Sigma \setminus I$ la relation de dépendance.

Aux deux extrêmes, on retrouve le monoïde libre Σ^* lorsque $I = \emptyset$ et le monoïde commutatif libre $(\mathbb{N}^\Sigma, +)$ lorsque $I = \Sigma \times \Sigma \setminus \{(a, a), a \in \Sigma\}$.

Tout monoïde de trace $\mathcal{M}(\Sigma, I)$ peut s'incarner en un modèle de Tetris. L'ensemble des pièces est Σ et l'ensemble des colonnes est $\mathcal{R} = \{\{a, b\}, (a, b) \in D\}$. L'emplacement des pièces est défini par $R : \Sigma \rightarrow 2^{\mathcal{R}}$, $R(a) = \{\{u, v\} \in \mathcal{R} \mid a \in \{u, v\}\}$. Enfin, les pièces sont rectangulaires et de hauteur 1.

Remarque. Le théorème 2.6 nous dit que la série $\Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}_{\max}, w \mapsto h(w)$, est reconnaissable. On peut être plus précis en utilisant la terminologie des séries reconnaissables sur un monoïde quelconque, voir [66, Chap. II]. Si t est une trace, on note $h(t)$ la hauteur de l'empilement associé. La série $\mathcal{M}(\Sigma, I) \rightarrow \mathbb{N}_{\max}, t \mapsto h(t)$, est elle aussi reconnaissable. C'est une conséquence de la propriété suivante : $(a, b) \in I \implies \mathcal{M}(ab) = \mathcal{M}(ba)$.

Notes bibliographiques.

Pour la distinction fondamentale entre *rationnels* et *reconnaissables* dans un monoïde quelconque, on peut se référer, par exemple, à [5, 26, 66]. Les monoïdes de trace sont très étudiés en Informatique théorique, voir par exemple [23, 24, 25]. Mentionnons juste un résultat saillant. Langages rationnels et reconnaissables ne coïncident pas dans $\mathcal{M}(\Sigma, I)$ (sauf si $I = \emptyset$). En effet si $(a, b) \in I$ alors $(ab)^* \in \text{Rat}(\mathcal{M}(\Sigma, I))$ mais $(ab)^* \notin \text{Rec}(\mathcal{M}(\Sigma, I))$. Le théorème d'Ochmański caractérise les langages reconnaissables de $\mathcal{M}(\Sigma, I)$ comme les langages rationnels pour lesquels l'étoile de Kleene n'est appliquée qu'à des traces connectées (i.e. dont l'alphabet engendre un sous-graphe connexe de (Σ, D)), voir par exemple [25, Chap.6].

Les monoïdes de trace apparaissent également en mathématiques comme parents pauvres des groupes de trace.

2.4 Réseaux de Petri

Revenons sur l'atelier de production de la section 2.1. La figure 5 est une représentation sous forme de réseau de Petri de l'atelier.

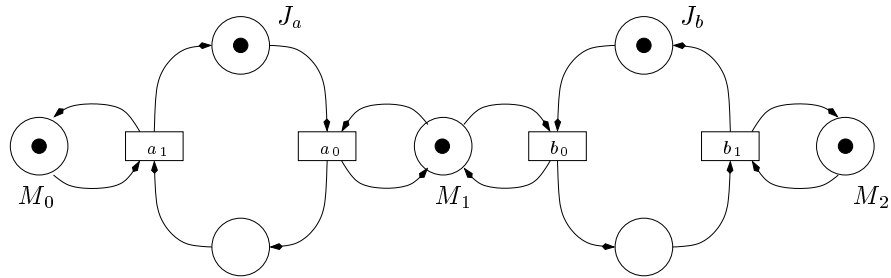


Figure 5: Atelier de production.

Les jetons M_0, M_1 et M_2 correspondent aux machines. Le jeton $J_i, i \in \{a, b\}$, matérialise le degré d'avancement de la production d'un objet de la gamme J_i .

On a représenté en figure 6, le cycle de production correspondant à l'ordonnancement $w = a_0b_0a_1b_1$, en indiquant à chaque étape la tâche élémentaire effectuée et sa durée.

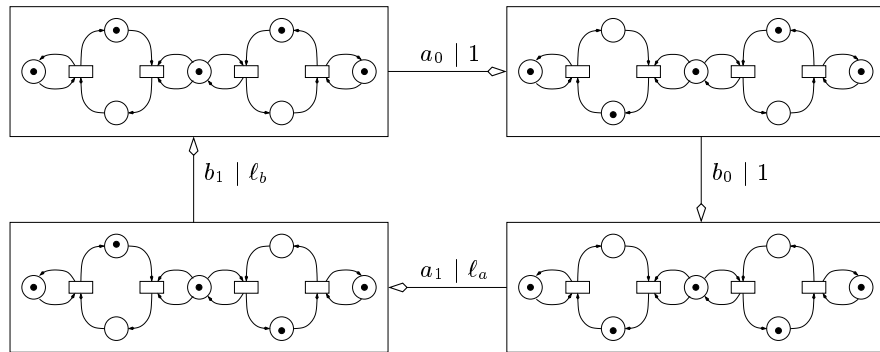


Figure 6: Fabrication d'un objet de chaque gamme suivant $a_0b_0a_1b_1$.

La durée totale d'exécution $h(w)$ n'est pas la somme des durées élémentaires, certaines des tâches étant effectuées en parallèle. En revanche, d'après ce qui précède, $h(w)$ est la hauteur de l'empilement du modèle de Tetris 1, et se calcule à l'aide de l'automate max-plus de la figure 2.

D'une façon générale, la dynamique de tout réseau de Petri 1-borné temporisé peut se représenter à l'aide d'un modèle de Tetris, et donc d'un automate max-plus. On propose maintenant un énoncé précis de ce résultat.

Définition 2.9. *Un Réseau de Petri (RdP) est un quadruplet $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F}, M)$, où $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ est un graphe fini orienté biparti dont les nœuds sont $\mathcal{T} \sqcup \mathcal{P}$ et les arcs $\mathcal{F} \subseteq (\mathcal{T} \times \mathcal{P}) \sqcup (\mathcal{P} \times \mathcal{T})$, et où $M \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$. Les éléments de \mathcal{P} sont les places, ceux de \mathcal{T} les transitions, les éléments de $\mathbb{N}^{\mathcal{P}}$ sont les marquages et M est le marquage initial.*

Il existe une convention graphique standard pour les RdP : les places sont représentées par des cercles, les transitions par des rectangles, et le marquage $M(p)$, $p \in \mathcal{P}$, est matérialisé par p jetons à l'intérieur de la place p , voir figures 5 et 6.

La particularité d'un RdP est d'être un objet dynamique. La structure de graphe n'est jamais modifiée mais le marquage évolue suivant la *règle de tir* (ou *franchissement* en version plus pacifique) définie ci-dessous et illustrée en figure 6.

1. Une transition a est *habilitée* dans le marquage M si chaque place d'entrée de a contient au moins un jeton;
2. une transition habilitée a peut être *tirée* : le *tir* de a transforme le marquage M en M' obtenu en enlevant un jeton de chaque place d'entrée de a et en ajoutant un jeton dans chaque place de sortie de a . On écrit $M \triangleleft a = M'$.

Avec un RdP, on peut modéliser la concurrence, le choix (ou conflit, pour les pessimistes) et la synchronisation, cf. figure 7.

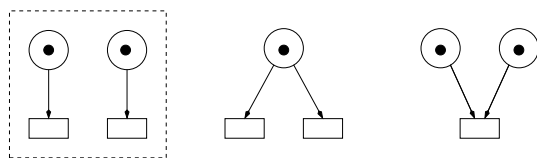


Figure 7: Concurrence, choix et synchronisation.

Un automate classique peut être vu comme un réseau de Petri sans synchronisation (ou *machine d'états*) avec un seul jeton.

Langage d'un réseau de Petri.

Un mot $w = w_0 w_1 \cdots w_{n-1} \in \mathcal{T}^*$ est *admissible* pour M , ou constitue une *suite de tirs* pour M , s'il existe une suite de marquages $M =$

$M_0, M_1, \dots, M_n = M'$ tel que $M_i \triangleleft w_i = M_{i+1}$. On écrit alors $M \triangleleft w = M'$. On dit également que M' est *atteignable* depuis M . On pose

$$R(M) = \{M' \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}} \mid \exists w \in \mathcal{T}^*, M \triangleleft w = M'\}$$

pour l'ensemble (éventuellement infini) des marquages atteignables depuis M .

Définition 2.10. *Le graphe des marquages est le graphe orienté d'ensemble de nœuds $R(M)$ et d'ensemble d'arcs $\{M' \rightarrow M'' \triangleleft t, M' \in R(M), t \in \mathcal{T}\}$. On le note $(R(M), \rightarrow)$. On peut également le voir comme automate des marquages en considérant les arcs étiquetés $\{M' \xrightarrow{t} M'' \triangleleft t, M' \in R(M), t \in \mathcal{T}\}$. L'état initial est M et tous les états sont terminaux. On le note $(R(M), \xrightarrow{\mathcal{T}})$.*

Le langage L d'un réseau de Petri de marquage initial M est l'ensemble des mots admissibles depuis M ,

$$L = \{w \in \mathcal{T}^* \mid \exists M' \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}, M \triangleleft w = M'\}. \quad (9)$$

Lorsque $R(M)$ est fini, L est un langage rationnel et $(R(M), \xrightarrow{\mathcal{T}})$ est un automate fini reconnaissant L .

Définition 2.11. *Un réseau de Petri de marquage M et de langage L est*

- vivant si : $\forall u \in L, \forall t \in \mathcal{T}, \exists v \in \mathcal{T}^*, uvt \in L$;
- borné si : $\exists k \in \mathbb{N}, \forall u \in L, \forall p \in \mathcal{P}, (M \triangleleft u)(p) \leq k$;
- 1-borné si : $\forall u \in L, \forall p \in \mathcal{P}, (M \triangleleft u)(p) \leq 1$.

Un RdP est borné si et seulement si $R(M)$ est fini. Un RdP borné est vivant si et seulement si chaque composante fortement connexe terminale de $(R(M), \xrightarrow{\mathcal{T}})$ contient toutes les étiquettes.

Remarque. On peut voir de façon plus abstraite un réseau de Petri comme un ensemble de vecteurs $\{M, (\mathbf{t})_{t \in \mathcal{T}}\}$ avec $M \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$ et $\mathbf{t} \in \{-1, 0, 1\}^{\mathcal{P}}$. Le vecteur \mathbf{t} correspond à la transition t . On a $\mathbf{t}_p = -1$ si p est une place d'entrée mais pas de sortie de t , $\mathbf{t}_p = 1$ si p est une place de sortie mais pas d'entrée de t et $\mathbf{t}_p = 0$ sinon. Un mot $w = w_0 w_1 \cdots w_{n-1} \in \mathcal{T}^*$ est admissible si

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad M + \sum_{j=0}^i \mathbf{w}_j \geq (0, \dots, 0).$$

On a alors $M \triangleleft w = M + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{w}_j$. Lorsqu'on remplace la contrainte $\mathbf{t} \in \{-1, 0, 1\}^{\mathcal{P}}$ par $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{P}}$, le modèle est appelé *système d'addition de vecteurs*, voir par exemple [62].

L'analyse classique des RdP repose pour une grande part sur des techniques d'algèbre linéaire et sur la matrice N obtenue en juxtaposant les vecteurs $(\mathbf{t})_{t \in \mathcal{T}}$ (c'est la matrice d'incidence du graphe $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$).

Langage de trace d'un réseau de Petri.

Le langage L n'est pas très adapté à la description des exécutions d'un RdP.

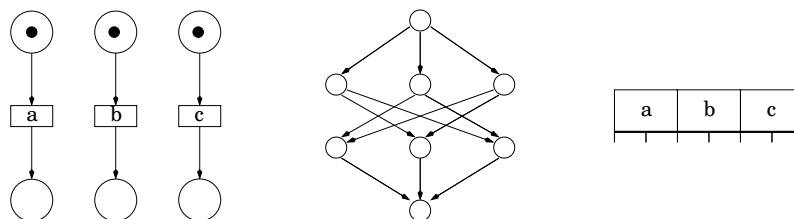


Figure 8: Exécution séquentielle et trace d'exécution.

Considérons en effet le RdP de la figure 8 (gauche) et l'exécution consistant à franchir de façon concurrente les transitions a , b et c . Il y a six mots dans L qui correspondent à cette unique exécution, ou plutôt à six séquentialisations possibles de l'exécution. (On parle d'une sémantique d'entrelacement.)

Pour remédier à cet inconvénient, une idée naturelle consiste à représenter les exécutions par des traces plutôt que par des mots.

Pour ce faire, on se restreint aux réseaux de Petri 1-bornés (pour une discussion du cas général, on se référera à Diekert [23]). On dit que deux transitions sont indépendantes si elles ne partagent aucune place ni en entrée ni en sortie. Formellement, on définit

$$I = \{(a, b) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \mid (\bullet a \cup a \bullet) \cap (\bullet b \cup b \bullet) = \emptyset\}$$

où $\bullet x = \{y \mid (y, x) \in \mathcal{F}\}$ et $x \bullet = \{y \mid (x, y) \in \mathcal{F}\}$. Soit $\mathbb{M}(\mathcal{T}, I)$ le monoïde de trace (déf. 2.8) correspondant. On représente les exécutions par des traces de $\mathbb{M}(\mathcal{T}, I)$. Ce faisant, on identifie deux mots de L s'ils ne diffèrent que par l'ordre de séquentialisation des franchissements concurrents. Soit $\pi : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{M}(\mathcal{T}, I)$ le morphisme canonique. On appelle $\pi(L)$ le *langage de trace* du RdP.

Le langage $\pi(L)$ est évidemment un rationnel de $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, mais on peut aussi montrer que c'est un reconnaissable. (Cf. les *Notes bibliographiques* de la section 2.3.)

On peut visualiser $\mathbb{M}(\mathcal{T}, I)$ à l'aide d'un modèle de Tetris d'ensemble de colonnes \mathcal{P} , la pièce a occupant les emplacements $(\bullet a \cup a \bullet)$, cf. la figure 8 (droite).

Réseau de Petri temporisé.

La dynamique d'évolution du marquage dans un réseau de Petri est de nature "logique". Pour introduire une dimension temporelle, il faut enrichir le modèle.

Un *réseau de Petri temporisé* est un RdP avec un *temps de tir* constant $\tau(a) \in \mathbb{R}_+$ associé à chaque transition a , et un *temps de latence* (ou de *séjour*) $\tau(p) \in \mathbb{R}_+$ associé à chaque place p . Le tir des transitions se fait suivant la sémantique suivante. Supposons que la transition a devient habilitée à l'instant t . La transition peut alors être mise à feu, auquel cas le tir a lieu en trois étapes :

1. à l'instant t , un jeton est retiré de chaque place d'entrée;
2. à l'instant $t + \tau(a)$, un jeton est ajouté dans chaque place de sortie;
3. à l'instant $t + \tau(a) + \tau(p)$, le jeton ajouté en place p est prêt à participer à l'habilitation d'autres transitions.

Ainsi, si le tir d'une transition est décidé, celui-ci a lieu "au plus tôt". On notera aussi que les décisions prises sur les transitions à franchir ne prennent pas en compte le temps, tous les choix logiquement admissibles sont possibles (par opposition aux sémantiques de compétition, également classiques pour les RdP temporisés).

On suppose que l'évolution temporelle du RdP débute à l'instant 0 dans le marquage initial. Étant donné un mot admissible $w \in L$, tel que $M \triangleleft w = M'$, on note $h(w)$ la *durée d'exécution* de w , c'est-à-dire le premier instant auquel toutes les transitions de w ont fini leur tir, et tous les jetons de M' ont fini leur temps de latence.

On peut maintenant énoncer le résultat principal. L'idée est la suivante : on part de la représentation par des pièces de Tetris de hauteur 1, et on code le temps par une déformation des pièces, voir fig. 9 (les temps de tir et de latence sont indiqués entre parenthèses).

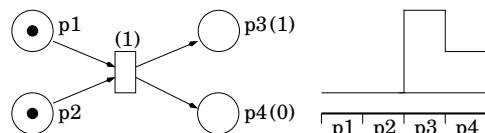


Figure 9: Pièce déformée.

Théorème 2.12. *Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F}, M)$ un réseau de Petri 1-borné de langage L et temporisé par $\tau : \mathcal{T} \sqcup \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$. On considère le modèle de Tetris*

$(\mathcal{T}, \mathcal{P}, R, l, u)$ avec $R(a) = \bullet a \cup a \bullet$, $\forall p \in R(a), l(a)_p = 0$ et

$$u(a)_p = \begin{cases} \tau(a) + \tau(p) & \text{si } p \in a \bullet \\ 0 & \text{si } p \in (\bullet a \setminus a \bullet) \end{cases}$$

Soit $\mathcal{M} : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{\mathcal{P} \times \mathcal{P}}$ le morphisme max-plus associé à ce modèle de Tetris. Si $w \in L$, la durée d'exécution est donnée par $h(w) = \mathbf{o} \mathcal{M}(w) \mathbf{o}$.

Lorsque $w \notin L$, l'empilement w n'a pas d'interprétation pour le réseau de Petri.

Il est en général possible d'associer à un RdP temporisé un modèle de Tetris avec un ensemble de colonnes strictement plus petit que \mathcal{P} , par exemple avec une colonne par composante machine d'états dans un recouvrement du RdP par machines d'états.

Lorsqu'on applique ce programme au RdP de la figure 5 (les temps de tirs étant $\tau(a_0) = 1, \tau(a_1) = \ell_a, \tau(b_0) = 1, \tau(b_1) = \ell_b$, et les temps de séjours étant tous nuls), on obtient précisément le modèle de Tetris de la figure 1 (gauche), et donc, après simplifications, l'automate max-plus de la figure 2.

On peut résumer ce qui précède comme suit. Le RdP temporisé est analysé à travers deux objets :

- le langage rationnel L pour l'aspect logique;
- le modèle de Tetris pour l'aspect temporisé.

Il est possible de synthétiser ces deux objets en un seul. Commençons par une définition.

Définition 2.13. Dans un semi-anneau \mathbb{K} , le produit tensoriel d'une matrice A de dimension $r \times s$ et d'une matrice A' de dimension $r' \times s'$ est la matrice $A \otimes^t A'$ de dimension $rr' \times ss'$ définie par $(A \otimes^t A')_{(i,i')(j,j')} = A_{ij} A'_{i'j'}$. Le produit tensoriel des \mathbb{K} -automates $\mathcal{A} = (\alpha, \mu, \beta)$ et $\mathcal{A}' = (\alpha', \mu', \beta')$ est le \mathbb{K} -automate $\mathcal{A} \otimes^t \mathcal{A}' = (\alpha \otimes^t \alpha', \mu \otimes^t \mu', \beta \otimes^t \beta')$. Soit $\mathcal{S}(\mathcal{A}), \mathcal{S}(\mathcal{A}')$ et $\mathcal{S}(\mathcal{A} \otimes^t \mathcal{A}')$ les séries reconnues par $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ et $\mathcal{A} \otimes^t \mathcal{A}'$. On a $\langle \mathcal{S}(\mathcal{A} \otimes^t \mathcal{A}'), w \rangle = \langle \mathcal{S}(\mathcal{A} \otimes^t \mathcal{A}'), w \rangle \langle \mathcal{S}(\mathcal{A} \otimes^t \mathcal{A}'), w \rangle$ (produit dans \mathbb{K}).

Le langage L est rationnel, donc, cf. §2.2, il existe un automate max-plus (α, μ, β) tel que

$$\alpha \mu(w) \beta = \begin{cases} 0 & \text{si } w \in L \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

La série durée d'exécution $h : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ (avec la convention $h(w) = -\infty$ si $w \notin L$) vérifie $h(w) = (\alpha \mu(w) \beta) \otimes (\mathbf{o} \mathcal{M}(w) \mathbf{o})$. Elle est donc reconnue par l'automate max-plus

$$(\alpha \otimes^t \mathbf{o}, \mu \otimes^t \mathcal{M}, \beta \otimes^t \mathbf{o}).$$

Notes bibliographiques.

Les réseaux de Petri ont été introduits par Carl Adam Petri dans les années 1960 pour modéliser les systèmes concurrents. Pour plus de détails sur la théorie classique des RdP non-temporisés, on peut consulter Murata [59] et Desel & Esparza [21]. Il existe de nombreux modèles d’extensions temporisées des RdP, voir par exemple Ajmone-Marsan & al [1] et Haas [40]. Des modèles différents de celui présenté ci-dessus seront considérés en §2.6. L’idée d’utiliser les langages de trace pour représenter les exécutions des réseaux de Petri est due à Mazurkiewicz [55, 56]. Le théorème 2.12 est montré dans Gaubert & M. [32].

Mentionnons au passage un dernier aspect. L’automate des marquages d’un RdP 1-borné peut être vu comme un cas particulier très spécifique d’*automate asynchrone*. Ces derniers constituent la “bonne” notion de machine finie dans les monoïdes de trace. Le théorème de Zielonka établit en effet l’équivalence entre langages reconnaissables de $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ et langages reconnus par automate asynchrone, voir par exemple [25, Chap. 8].

2.5 Mise en perspective

On vient d’établir une correspondance entre réseaux de Petri, modèles de Tetris et automates max-plus. Au delà de l’aspect ludique, on peut se demander quelle est l’utilité réelle de cette correspondance.

La première réponse est pédagogique : la correspondance permet d’enseigner de façon unifiée plusieurs formalismes standards de l’étude des systèmes à événements discrets.

Mais, la correspondance peut aussi servir d’aide à l’analyse ou à la simulation. La modélisation par produits de matrices max-plus nous a ainsi permis d’abstraire et simplifier plusieurs preuves sur le comportement des réseaux de Petri temporisés dans [8]. Quant à la représentation à la Tetris, elle fournit par exemple l’intuition visuelle qui sous-tend les méthodes bijectives utilisées pour énumérer les traces [75]. Enfin, cette dimension visuelle fait des modèles de Tetris une excellente source d’exemples et de contre-exemples, que nous avons exploitée dans [45].

Dernier élément de réponse, les automates max-plus fournissent le bon cadre théorique pour formuler et résoudre certains problèmes d’analyse asymptotique et d’optimisation de systèmes à événements discrets.

2.6 Graphes d’événements

Revenons encore une fois sur l’atelier de production des figures 1, 2 et 5. Cette fois-ci, on fixe l’ordre $w = a_0 a_1 b_0 b_1$, et on s’intéresse à l’ordonnancement cyclique $www \cdots$. On peut représenter le fonctionnement de l’atelier sous la forme du RdP de la fig. 10.

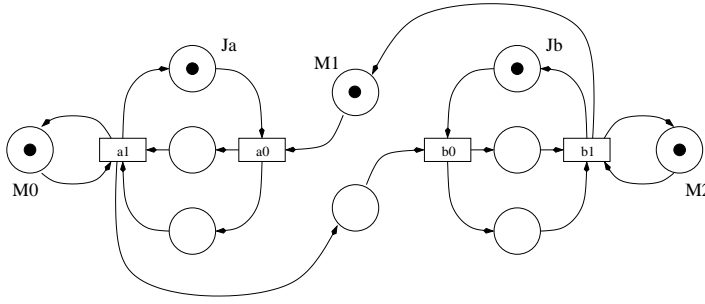


Figure 10: L'atelier avec un ordonnancement cyclique.

Par rapport au RdP de la fig. 5, la place de choix a disparu, elle a été remplacée par un circuit codant en dur l'ordre imposé pour le traitement des tâches. On a (th. 2.12),

$$h(w^n) = \mathbf{o} \mathcal{M}(w)^n \mathbf{o}, \quad \mathcal{M}(w) = \begin{pmatrix} h_a & 2 & 1 + h_b \\ h_a & 2 & 1 + h_b \\ -\infty & 1 & h_b \end{pmatrix}.$$

La dynamique est donc entièrement déterminée par un automate max-plus à une lettre, c'est-à-dire par les puissances d'une matrice max-plus.

Ce principe est valide pour la classe générale des graphes d'événements temporisés vivants, sans contrainte de bornitude, avec une modélisation légèrement différente. Précisons le résultat.

Définition 2.14. *Un graphe d'événements (GE) est un réseau de Petri $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F}, M)$ tel que pour toute place p , on ait $|\bullet p| = |p \bullet| = 1$.*

Un GE est vivant si et seulement si chaque circuit contient au moins un jeton. Par ailleurs, la propriété suivante est vraie pour un GE vivant de langage L (on reprend les notations de *système d'addition de vecteurs* de §2.4) : pour $M \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}, M' \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}, (k_t)_{t \in \mathcal{T}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{T}}$,

$$\left[M + \sum_{t \in \mathcal{T}} k_t \mathbf{t} = M' \right] \implies \left[\exists w \in L, \forall t \in \mathcal{T}, |w|_t = k_t, M \triangleleft w = M' \right].$$

Enfin, la contrainte “ $\forall p, |\bullet p| = |p \bullet| = 1$ ”, entraîne directement que $M + \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbf{t} = M$. Conclusion et point crucial pour la modélisation à venir, pour un GE vivant, on a

$$\exists w \in L, \forall t \in \mathcal{T}, |w|_t = 1, M \triangleleft w = M. \quad (10)$$

Considérons maintenant un GE vivant avec temporisations $\tau : \mathcal{T} \sqcup \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$, évoluant suivant la sémantique définie en §2.4.

L'idée est de regarder le GE après l'exécution de w^n , $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire après n tirs de chaque transition. Ce faisant, comme $M \triangleleft w = M$, on voit toujours le GE sous le marquage initial M . Cette simple observation recèle une subtilité. Les instants de n -ième tirs des transitions n'ont pas de raisons d'être égaux. C'est donc un RdP avec des horloges locales non-synchronisées qui "est" dans l'état M . Si on filme l'évolution du RdP en temps réel, il se peut que l'on ne voit jamais réapparaître le marquage M .

Soit $x(n) = (x(n)_t)_{t \in \mathcal{T}}$ le vecteur des instants de fin de n -ième tir des transitions. On a

$$x(n)_t = \max_{p \in \bullet t} [x(n - M(p))_{\bullet p} + \tau(p)] + \tau(t). \quad (11)$$

Par exemple, si on se concentre sur la transition b_0 du GE de la fig. 10, on obtient : $x(n)_{b_0} = \max[x(n)_{a_1}, x(n-1)_{b_1}] + 1$.

Les équations (11) ne font intervenir que les opérations \max et $+$. On peut donc réécrire (11) sous forme matricielle dans le semi-anneau max-plus, voir déf. 2.3. Ci-dessous, le produit matriciel s'interprète dans \mathbb{R}_{\max} et \vee est le maximum coordonnée par coordonnée. On a :

$$x(n) = A_0 x(n) \vee A_1 x(n-1) \vee \dots \vee A_m x(n-m), \quad (12)$$

où $m = \max_p M(p)$. Précisément, on a $A_u \in \mathbb{R}_{\max}^{\mathcal{T} \times \mathcal{T}}$ et

$$(A_u)_{ij} = \begin{cases} \max_{p|j \rightarrow p \rightarrow i, M(p)=u} \tau(p) + \tau(i) & \text{si } \{p \mid j \rightarrow p \rightarrow i, M(p)=u\} \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'équation (12) est implicite avec $x(n)$ des deux côtés de l'égalité. Posons $y = A_1 x(n-1) \vee \dots \vee A_m x(n-m)$. On obtient en remplaçant successivement $x(n)$ par $A_0 x(n) \vee y$ dans le membre droit de l'égalité :

$$x(n) = A_0^2 x(n) \vee A_0 y \vee y, \quad x(n) = A_0^{k+1} x(n) \vee A_0^k y \vee \dots \vee A_0 y \vee y. \quad (13)$$

En jonglant avec l'interprétation combinatoire du produit matriciel, on obtient : "GE vivant" \implies "tous les circuits sont marqués" \implies "le graphe de A_0 est acyclique" \implies " $A_0^{|\mathcal{T}|} = (-\infty)_{i,j}$ ".

Posons

$$A_0^* = \max_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = \max_{i=0}^{|\mathcal{T}|-1} A_0^i$$

(c'est l'étoile de Kleene de A_0 dans $\mathbb{R}_{\max}^{\mathcal{T} \times \mathcal{T}}$). On déduit de (13), l'équation

$$x(n) = A_0^* A_1 x(n-1) \vee \dots \vee A_0^* A_m x(n-m). \quad (14)$$

On a donc obtenu une représentation sous la forme d'une récurrence auto-régressive max-plus linéaire.

On peut transformer cette récurrence en une récurrence d'ordre 1 à l'aide de manipulations standards. Définissons le vecteur colonne $X(n) = (x(n), x(n-1), x(n-m+1))$. Il existe une matrice max-plus A de dimension $(\mathcal{T} \times \{1, \dots, m\}) \times (\mathcal{T} \times \{1, \dots, m\})$ telle que

$$X(n) = A X(n-1). \quad (15)$$

Pour achever la détermination de (15), il faut fixer les conditions initiales. De nombreux choix sont possibles. Le plus simple consiste à supposer qu'à l'instant 0, tous les jetons sont simultanément disposés dans le GE, temps de latence non-effectués. Ceci revient à poser $X(-1) = \mathbf{o}$.

Il existe une autre approche pour obtenir une équation de type (15). Il s'agit de transformer le GE initial en un GE "équivalent" avec au plus un jeton par place. Pour ce dernier GE, les étapes (11)-(14) fournissent directement une équation de type (15).

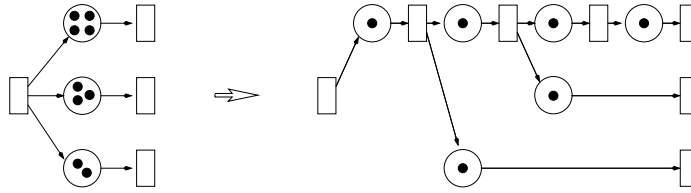


Figure 11: Transformation de GE.

Le type de transformations en jeu est illustré en fig. 11, voir Gaujal & Jean-Marie & M. [33, 34] pour plus de détails et pour le parallèle avec le "retiming" de circuit à la Leiserson & Saxe [48].

On peut résumer ce qui précède par l'énoncé suivant.

Théorème 2.15. *Considérons un graphe d'événements vivant temporisé. Les instants de tirs successifs d'une transition donnée sont reconnus par un automate max-plus à une lettre. Ce dernier peut être choisi avec un espace d'états de cardinal $|\mathcal{T}| + \sum_{t \in \mathcal{T}} \max_{p \in t \bullet} [M(p) - 1]^+$.*

On peut proposer une extension du modèle avec des temporisations qui varient au cours du temps. Le point essentiel, pour pouvoir continuer à modéliser la dynamique par une équation de récurrence max-plus, est de s'assurer qu'il n'y a pas de dépassements entre jetons. Pour ce faire, on considère un GE vivant $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F}, M)$ avec :

- Des temps de séjour constants : $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$;
- Si la transition a appartient à un circuit contenant un seul jeton, alors a possède des temps de tir variables : $\tau(a) = (\tau(a)_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\tau(a)_n \in \mathbb{R}_+$. Sinon, a possède des temps de tir constants : $\tau(a) \in \mathbb{R}_+$.

Sous ces restrictions, on peut suivre le même programme que précédemment. On aboutit à la place de (15) à une récurrence max-plus du type

$$X(n) = A(n-1) X(n-1). \quad (16)$$

Il est particulièrement intéressant de regarder une variante aléatoire. Pour les transitions appartenant à un circuit à un seul jeton, $\tau(a) = (\tau(a)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. On aboutit alors à la récurrence (16) où $(A(n))_n$ est une suite aléatoire de matrices max-plus.

Revenons à un GE vivant avec temporisations constantes. Lorsque les temporisations sont à valeurs entières, il existe une mise en équation duale qui utilise les compteurs (combien de tirs de la transition ont eu lieu jusqu'à la date n) au lieu des dateurs (à quelle date a eu lieu le n -ième tir de la transition). On aboutit à une équation de type (15) mais dans le semi-anneau min-plus. On peut également considérer à la fois les dateurs et les compteurs à travers une modélisation dans un semi-anneau adéquat baptisé du beau nom de $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$.

Références bibliographiques.

Les récurrences max-plus du type (15) ont été étudiées depuis les années 50, initialement comme modèles des problèmes de plus long chemin [19, 36]. Leur rôle clé dans la modélisation des systèmes avec synchronisation a été mis en lumière par le groupe max-plus de l'INRIA Rocquencourt [16]. Il existe des ouvrages de synthèse sur cette approche : [3, 42]. La modélisation par compteurs et dateurs est traitée en détail dans [3, Chap. 5]. Les récurrences max-plus apparaissent également dans d'autres contextes : par ex. le modèle de Frenkel-Kontorova pour les chaînes d'atomes dans une structure cristalline [37], ou encore l'étude des solutions de viscosité de certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires [54].

2.7 Applications topicales

On considère un jeu à deux joueurs, \mathcal{A} et \mathcal{B} , défini comme suit. Le plateau de jeu est un graphe fini orienté, biparti et valué d'ensemble de nœuds (cases) $A \sqcup B$, d'ensemble d'arcs $E \subset (A \times B) \sqcup (B \times A)$ et de valuation $c : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Un jeton est disposé initialement sur une des cases de type A du plateau. L'un après l'autre, les joueurs déplacent le jeton en suivant un arc. Le joueur \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) joue lorsque le jeton est sur une case de type A (resp. B). Déplacer le jeton suivant l'arc e rapporte un gain $c(e)$ au joueur \mathcal{A} , et un gain $-c(e)$ au joueur \mathcal{B} (on parle d'un jeu à "somme nulle"). Un *tour* de jeu est constitué par un mouvement de \mathcal{A} suivi par un mouvement de \mathcal{B} .

Posons $v(n) = (v(n)_i)_i \in \mathbb{R}^A$ où $v(n)_i$ est le gain du joueur \mathcal{A} si la position initiale du jeton est i , et si les deux joueurs jouent de façon optimale une partie à n tours.

Le principe de Bellman (ou principe de la programmation dynamique), dont l'intuition est claire, nous dit que l'équation suivante est vérifiée,

$$v(n)_i = \max_{j \in B, (i,j) \in E} \left[c(i, j) + \min_{k \in A, (j,k) \in E} [c(j, k) + v(n-1)_k] \right]. \quad (17)$$

Définissons la matrice $C_A \in \mathbb{R}_{\max}^{A \times B}$ par $(C_A)_{ij} = c(i, j)$ si $(i, j) \in (A \times B) \cap E$ et $(C_A)_{ij} = -\infty$ sinon. Définissons de même la matrice $C_B \in \mathbb{R}_{\min}^{B \times A}$ par $(C_B)_{ij} = c(i, j)$ si $(i, j) \in (B \times A) \cap E$ et $(C_B)_{ij} = +\infty$ sinon.

En notant le produit matriciel max-plus par \otimes et le produit matriciel min-plus par \odot , on obtient une écriture condensée pour (17),

$$v(n) = C_A \otimes (C_B \odot v(n-1)).$$

Écrivons l'équation précédente sous la forme $v(n) = \varphi(v(n-1))$. On obtient $v(n) = \varphi^n(\mathbf{o})$, où $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)$.

Remarque. On peut suivre la même démarche pour un jeu à un seul joueur. Le vecteur de gain optimal satisfait alors une équation de récurrence max-plus : $v(n) = C_A \otimes v(n-1)$. Ceci fournit une motivation complémentaire de celle de la section 2.6 pour étudier les applications max-plus.

On dit que φ est une application *min-max-plus*. Les applications min-max-plus constituent une classe importante d'applications topicales. Avant de définir formellement ces dernières, on propose une seconde manière de motiver leur introduction.

Imaginons un SED comme une boîte noire à travers laquelle transitent des objets ou clients ou signaux. On observe uniquement les dates d'entrée et de sortie du système des objets-clients-signaux. Il est naturel dans ce contexte de faire les deux hypothèses suivantes :

- si on retarde les dates d'entrée, alors les dates de sortie sont également retardées;
- si on retarde les dates d'entrée d'une même durée d , alors les dates de sortie sont également retardées de d .

Une application topicale est un modèle simple permettant de capturer ces deux principes.

Définition 2.16. Une application $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est topicale si elle est croissante pour l'ordre produit ($\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ si $\forall i, x_i \geq y_i$),

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{y} \implies T(\mathbf{x}) \geq T(\mathbf{y}),$$

et “additivement homogène”,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad T(\mathbf{x} + (\lambda, \dots, \lambda)) = T(\mathbf{x}) + (\lambda, \dots, \lambda).$$

On note $\mathbf{Top}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des applications topicales de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Une forme topicale est une application de $\mathbf{Top}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Définissons le *plancher* et le *plafond* de deux vecteurs x, y de \mathbb{R}^n par $\lfloor x, y \rfloor = \min_i (y_i - x_i)$ et $\lceil x, y \rceil = \max_i (y_i - x_i)$. Une application topicale relève les planchers et abaisse les plafonds [39] :

$$\begin{aligned} T \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &\iff \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lfloor T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y}) \rfloor \geq \lfloor \mathbf{x}, \mathbf{y} \rfloor \\ &\iff \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lceil T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y}) \rceil \leq \lceil \mathbf{x}, \mathbf{y} \rceil. \end{aligned} \quad (18)$$

En traduisant “plafond” par “top”, on obtient une justification (convaincante ?) du terme topical. On déduit de (18) qu’une application topicale est 1-lipschitz par rapport à la norme sup,

$$T \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \implies \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \|T(\mathbf{y}) - T(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \quad (19)$$

où $\|\mathbf{u}\| = \max_i |u_i|$.

Définition 2.17. Soit $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$ et soit $\mathbb{R}^k/\mathbb{R}\mathbf{1}$ l'espace projectif additif obtenu en identifiant \mathbf{x} et \mathbf{y} si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_k) = (\lambda + y_1, \dots, \lambda + y_k)$. L'application de passage au quotient est notée $\pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k/\mathbb{R}\mathbf{1}$. Une application topicale $T \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ induit une application quotient notée $\tilde{T} : \mathbb{R}^k/\mathbb{R}\mathbf{1} \rightarrow \mathbb{R}^k/\mathbb{R}\mathbf{1}$.

Bestiaire. Proposons un petit bestiaire d'applications topicales. Si $\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \dots, T_m(\mathbf{x}))$ est une application topicale, alors

- $\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) + (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \lambda_i \in \mathbb{R}$, est une application topicale;
- $\mathbf{x} \mapsto T(k\mathbf{x})/k, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est une application topicale;
- $\mathbf{x} \mapsto T_i(\mathbf{x})$ est une forme topicale, pour tout i .

D'autre part, si $\mathbf{x} \mapsto T_i(\mathbf{x})$ est une forme topicale pour tout i , alors $\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \dots, T_m(\mathbf{x}))$ est une application topicale. Il suffit donc de décrire des formes topicales. Les applications suivantes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} sont topicales :

- Coordonnée : $\mathbf{x} \mapsto x_i$;
- Barycentre : $\mathbf{x} \mapsto \sum_i a_i x_i, \quad \forall i, a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1$;
- Max-plus : $\mathbf{x} \mapsto \max_i (a_i + x_i), \quad \forall i, a_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \exists i, a_i \neq -\infty$;

- Min-plus : $\mathbf{x} \mapsto \min_i(a_i + x_i)$, $\forall i, a_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\exists i, a_i \neq +\infty$;
- Conjugué-linéaire: $\mathbf{x} \mapsto \log(\sum_i a_i \exp(sx_i))/s$, $\forall i, a_i \in \mathbb{R}_+$, $\exists i, a_i \neq 0$.

Notons $\mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, resp. $\mathbf{Minp}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, l'ensemble des applications max-plus, resp. min-plus, de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Notons $a \vee b = \max(a, b)$ et $a \wedge b = \min(a, b)$.

Lemme 2.18. *Une application $T \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est max-plus, resp. min-plus, si et seulement si*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad T(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) \vee T(\mathbf{y}), \text{ resp. } T(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) \wedge T(\mathbf{y}).$$

Dernière classe importante de formes topicales :

- Min-max-plus :
 $\mathbf{x} \mapsto T_1(\mathbf{x}) \wedge \cdots \wedge T_k(\mathbf{x})$, $\forall i, T_i \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (forme conjonctive);
ou
 $\mathbf{x} \mapsto T_1(\mathbf{x}) \vee \cdots \vee T_k(\mathbf{x})$, $\forall i, T_i \in \mathbf{Minp}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (forme disjonctive).

En fig. 12, on a représenté le graphe de l'application min-max-plus $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$T(x, y) = [x \vee y] \wedge [(x-1) \vee (y+1)] \wedge [(x-2) \vee (y+2)] \\ \wedge [(x-3) \vee (y+3)] \wedge [(x-5) \vee (y+5)] \wedge [(x+5) \vee y].$$

Le graphe est invariant par translation le long de $(1, 1, 1)$, ce qui correspond à l'homogénéité additive. Par ailleurs, l'application est affine par morceaux avec un nombre fini de morceaux. C'est le cas pour toute application min-max-plus.

Les applications conjuguées-linéaires permettent d'établir une passerelle entre applications linéaires sur le cône positif et applications max-plus.

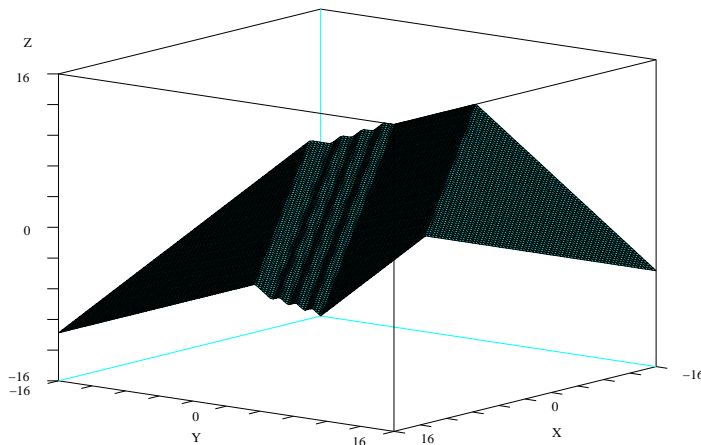
Soit A une matrice de $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$, avec $A_{i,\cdot} \neq (-\infty, \dots, -\infty)$ pour tout i . Notons $\text{mp}(A)$ l'application max-plus associée définie par

$$\text{mp}(A) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}, \quad y_i = \max_j(A_{ij} + x_j). \quad (20)$$

Soit A une matrice de $\mathbb{R}_+^{n \times m}$, avec $A_{i,\cdot} \neq (0, \dots, 0)$ pour tout i . Pour $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, on note $\text{cl}(A, s)$ l'application conjuguée-linéaire définie par

$$\text{cl}(A, s) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}, \quad \exp(s\mathbf{y}) = A \exp(s\mathbf{x}), \quad (21)$$

c'est-à-dire $y_i = 1/s \log(\sum_j A_{ij} \exp(sx_j))$ pour tout i .

Figure 12: Le graphe de l'application min-max-plus T .

Lemme 2.19. Soit A une matrice de $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$, avec $A_{i.} \neq (-\infty, \dots, -\infty)$ pour tout i . Lorsque $s \rightarrow \infty$, les applications $\text{cl}((\exp(sA_{ij}))_{ij}, s)$ convergent uniformément vers $\text{mp}(A)$.

Dans l'énoncé qui précède, on adopte la convention $\exp(-\infty) = 0$. Le lemme se démontre sans difficultés.

Définition 2.20. Un système itéré de fonctions (SIF) topical est une collection d'applications $(T_i)_{i \in I}$, I fini, $T_i \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$.

On utilisera la notation suivante : pour $w = w_0 \cdots w_{n-1} \in I^*$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$,

$$\mathbf{x} \triangleleft w = T_{w_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{w_0}(\mathbf{x}). \quad (22)$$

Soit $T = (T_i)_{i \in I}$, $T_i \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ un SIF max-plus et soit un vecteur initial $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. On peut naturellement associer à ce SIF l'automate max-plus $(\mathbf{x}, \mathcal{T}, \mathbf{o})$, où $\mathcal{T}(i)$ est la matrice max-plus associée à T_i et où $\mathcal{T} : I^* \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{k \times k}$ est le morphisme défini par les $\mathcal{T}(i)$, $i \in I$. Soit $\alpha_+ : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ la forme topicale définie par $\alpha_+(x_1, \dots, x_k) = x_1 \vee \cdots \vee x_k$. On a $\mathbf{x} \otimes \mathcal{T}(w) \otimes \mathbf{o} = \alpha_+(\mathbf{x} \triangleleft w)$ pour tout w .

Dans la suite, on se placera soit dans le cadre des SIF max-plus, soit dans celui des automates max-plus, suivant le contexte.

Causalité et retardateurs.

Mentionnons pour terminer deux développements importants de la notion de topicalité introduits par Bousch [9, 10].

Le premier développement est une restriction. Une application topocale $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite *causale* si elle vérifie, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x} \wedge (\lambda, \dots, \lambda) = \mathbf{y} \wedge (\lambda, \dots, \lambda) \implies T(\mathbf{x}) \wedge (\lambda, \dots, \lambda) = T(\mathbf{y}) \wedge (\lambda, \dots, \lambda).$$

Cette hypothèse est naturelle dans le contexte de la modélisation des SED. Elle signifie intuitivement qu'un événement ayant lieu à la date λ ne peut influencer que les événements postérieurs à λ .

Les applications topocales causales ont un bon comportement dynamique [10], contrairement aux applications topocales générales (cf. le contre-exemple de Kohlberg & Sparrow en §3.1). En particulier elles appartiennent à la classe "uniformément topocale" qui sera définie en §3.1.

Le second développement est une extension de la notion de topicalité dans un cadre aléatoire. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de probabilité. On suppose l'existence d'une action $\mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$, $(t, \omega) \mapsto t + \omega$ préservant la mesure ($\mu(t + A) = \mu(A)$). Un *retardateur* est alors une application $u : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, croissante en x à ω fixé et vérifiant

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega, \quad u(t + \omega, t + x) = t + u(\omega, x). \quad (23)$$

Un retardateur permet de modéliser des mécanismes de retard du type de ceux induits par le métro, ou les feux rouges. Les retardateurs ont de bonnes propriétés dynamiques [9]. Une perspective serait de développer une théorie des graphes d'événements retardés (ou réseaux avec synchronisations et feux rouges). Une autre perspective serait d'étudier les retardateurs en dimension supérieure, soit $u : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, mesurable, croissante en x à ω fixé et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \omega \in \Omega, \quad u(t + \omega, (t, \dots, t) + \mathbf{x}) = (t, \dots, t) + u(\omega, \mathbf{x}).$$

Bousch propose d'appeler u une application *hélicale*. Lorsqu'on spécialise le modèle en supposant que Ω est réduit à un point, on retombe sur la notion d'application topocale.

Notes bibliographiques.

Les applications topocales ont été introduites par Crandall & Tartar [18]. On peut attribuer à Gunawardena & Keane [39, 38] l'idée d'étudier les propriétés dynamiques communes à ces applications, la mise en avant du lien avec les SED, ainsi que le terme "topocal". À la suite de Nussbaum [60], un certain nombre d'auteurs ont étudié les valeurs pouvant être prises par les périodes p des orbites périodiques des applications topocales, ou plus généralement des applications 1-lipschitz pour la norme sup. Lemmens & Scheutzw [49] ont ainsi montré que $p \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ pour une application topocale de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n (la borne est atteinte).

2.8 Files d'attente Markoviennes

Soit un guichet dispensant un service à des clients. Ceux-ci sont servis un par un, dans l'ordre de leur arrivée, et prennent place, tant que le guichet est occupé, dans une salle d'attente (ou buffer) de capacité infinie. La description trajectorielle du modèle est la suivante. Soit A_n ($\in \mathbb{R}$) l'instant d'arrivée du n -ième client, soit D_n ($\in \mathbb{R}$) son instant de départ, et soit s_n ($\in \mathbb{R}_+$) la durée du service requis au guichet. On suppose que $A_{n+1} \geq A_n$ pour tout n (les clients sont numérotés suivant leur ordre d'arrivée). On a :

$$D_n = \max(A_n, D_{n-1}) + s_n. \quad (24)$$

L'interprétation de (24) est la suivante : pour que le client n commence son service, il faut d'une part qu'il soit arrivé et d'autre part que le client précédent ait achevé son service. Ce que l'on vient de décrire est le mécanisme d'évolution de la *file d'attente simple*. Sa représentation graphique standard est donnée en figure 13 (gauche).

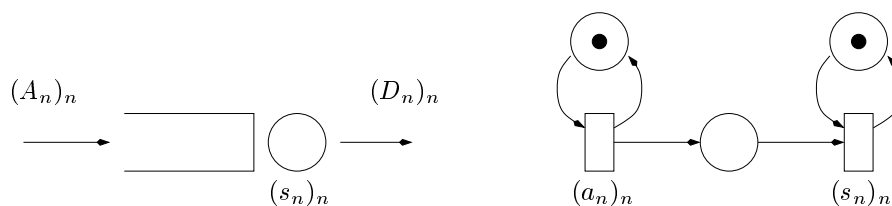


Figure 13: La file simple sous forme standard (gauche) et sous forme de GE (droite).

On peut connecter la file d'attente simple aux modèles introduits précédemment.

Posons $a_n = A_{n+1} - A_n$, la durée d'inter-arrivée. L'équation (24) peut se réécrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & -\infty \\ a_n + s_n & s_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_n \\ D_n \end{pmatrix}. \quad (25)$$

On obtient une équation de récurrence max-plus du type (16). On a vu en §2.6 que ce type de récurrence décrivait la dynamique des graphes d'événements (GE) avec temporisations variables. De fait, on peut modéliser la file simple sous forme de GE, cf. la figure 13 (droite). La place du centre dans le GE correspond à la salle d'attente de la file. La condition initiale considérée ici correspond à la file vide.

Une représentation à la Tetris est également possible, mais le mécanisme d'empilement est non-standard, cf. figure 14 (sur la figure, chaque pièce est étiqueté par sa hauteur).

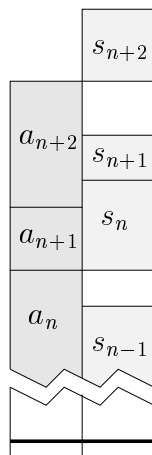


Figure 14: Empilement “à la Tetris” associé à la file simple.

Files d’attente en tandem.

Supposons maintenant que l’on dispose de K files simples numérotées de 1 à K . Les arrivées de clients provenant de l’extérieur ont lieu en file 1, puis les clients parcourent les files 1 à K dans l’ordre avant de quitter le système. On suppose que les temps de communication sont nuls, c’est à dire que l’instant de départ d’un client de la file i est égal à son instant d’arrivée à la file $i + 1$.

Soit $A_{n,k}$ l’instant d’arrivée du client n à la file k , et soit $s_{n,k}$ la demande de service du client n à la file k . On a, pour $k \geq 2$:

$$A_{n,k} = \max(A_{n-1,k}, A_{n,k-1}) + s_{n,k} . \quad (26)$$

Encore une fois, on peut réécrire (26) sous forme d’une récurrence max-plus. D’autre part, on obtient un GE représentant le modèle en mettant en série des GE du type de celui de la figure 13 (avec $K + 1$ transitions : une pour les entrées et une pour chaque file d’attente).

Les files en tandem correspondent à la façon la plus simple de mettre des files d’attente en réseau. On définit ci-dessous un cadre beaucoup plus vaste dans le contexte des réseaux aléatoires.

File d’attente Markovienne.

La file simple devient vraiment intéressante lorsqu’on ajoute des hypothèses aléatoires au modèle. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notons $\text{Exp}(\lambda)$ la loi exponentielle de paramètre λ . Rappelons que l’on a $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ si $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P\{X \geq t\} = \exp(-\lambda t)$.

On fait les hypothèses suivantes.

- Les inter-arrivées $(a_n)_n$ sont des v.a. i.i.d. de loi $\text{Exp}(\lambda)$. Alternative-ment, on peut dire que le processus des arrivées $(A_n)_n$ est un processus de Poisson de taux λ .
- Les services $(s_n)_n$ sont des v.a. i.i.d. de loi $\text{Exp}(\mu)$.
- Les v.a. $(a_n)_n$ et $(s_n)_n$ sont indépendantes.

Le modèle obtenu est la file $M/M/1/\infty$ PAPS dans la nomenclature de Kendall, ou plus simplement la file $M/M/1$. Le M signifie *Markovien*, le 1 signifie que la file dispose d'un unique serveur et l' ∞ que la salle d'attente est de capacité infinie. L'acronyme PAPS décrit la politique de service et signifie Premier Arrivé Premier Servi, en version anglo-saxonne cela devient FIFO pour First In First Out.

Le modèle s'étudie par l'intermédiaire du processus $M = (M_t)_t$, où M_t est le nombre de clients en attente ou en service à l'instant t . Sous les hypothèses qui précèdent, le processus M est un processus Markovien de saut à temps continu. On a représenté une trajectoire de M en figure 15.

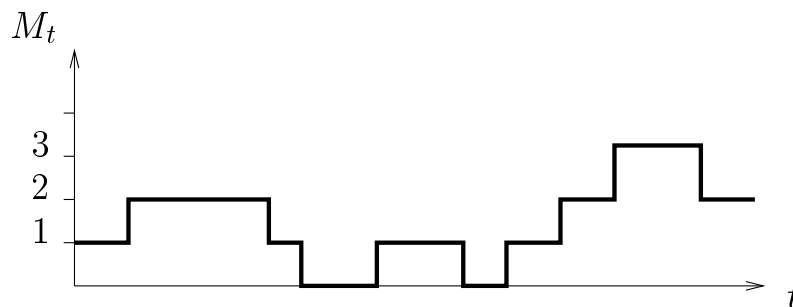


Figure 15: Trajectoire caractéristique pour le contenu du buffer.

Soit Q le générateur infinitésimal de M . Celui-ci a une forme simple donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(n, n+1) = \lambda, \quad Q(n+1, n) = \mu. \quad (27)$$

Un tel processus est connu sous le nom de processus de naissance et de mort.

Réseaux Markoviens de files d'attente.

Considérons K files de type $M/M/1$ indicées de 1 à K . Les arrivées depuis l'extérieur peuvent avoir lieu à toutes les files. Les arrivées extérieures en file i suivent un processus de Poisson de taux $\lambda_i \in [0, \infty[$, avec $\lambda_i \neq 0$ pour au moins une file i . Le taux de service en file i est $\mu_i \in]0, \infty[$. À la fin de son service en file i , un client est routé vers une file j , ou bien quitte définitivement le réseau. Ce routage peut s'effectuer de différentes façons. Considérons deux variantes.

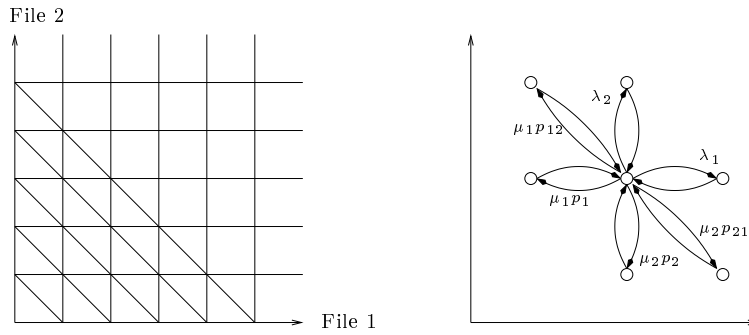


Figure 16: Réseau de Jackson de deux files : le graphe de transition de M , avec un agrandissement à droite.

- *Réseau de Jackson.* Un client terminant son service à la file i est routé vers la file j avec la probabilité p_{ij} et quitte définitivement le réseau avec la probabilité $1 - \sum_j p_{ij}$. Les routages sont indépendants les uns des autres et indépendants des arrivées extérieures et des services. La politique de routage est donc entièrement caractérisée par la donnée de la *matrice de routage* $P = (p_{ij})_{ij}$. On suppose que le rayon spectral de P est strictement inférieur à 1, où de façon équivalente que tout client entrant dans le réseau finit par en sortir (le réseau est *sans capture*).

- *Réseau de Kelly.* Une *route* est une suite finie de files (une même file peut apparaître plusieurs fois le long de la route). Il existe un ensemble fini \mathcal{C} de routes possibles pour les clients. À chaque client est associée une route qui détermine la suite des files visitées par le client. Les clients de route $c \in \mathcal{C}$ arrivent dans le réseau suivant un processus de Poisson de taux $\lambda_c > 0$. Les processus d'arrivées correspondant aux différentes routes sont indépendants les uns des autres et indépendants des services.

Dans un réseau de Jackson, chaque client traverse une suite finie de files avant de quitter le réseau. Appelons cette suite de files la *route* du client. On peut alors voir un réseau de Jackson comme une variante de réseau de Kelly, plus général parce que possédant une infinité de routes, mais aussi plus spécifique car les probabilités d'occurrence des routes sont toutes reliées par l'intermédiaire de la matrice P .

Encore une fois l'analyse de ces réseaux s'effectue par l'intermédiaire du processus M décrivant les contenus des différents buffers. C'est un processus Markovien de saut à temps continu. Dans le cas du réseau de Jackson, l'espace d'état est \mathbb{N}^K .

À titre d'illustration, on a représenté, en figure 16, l'espace d'états et le graphe de transition de M dans le cas d'un réseau de Jackson de deux files. On a également indiqué les différents taux de transition avec la convention $p_i = 1 - \sum_j p_{ij}$.

Notes bibliographiques.

La théorie des files d'attente a vu le jour autour de 1920 à partir des travaux d'Erlang sur le dimensionnement des réseaux téléphoniques. Le domaine connaît un regain d'activité avec la révolution technologique en cours dans le domaine des communications (réseaux locaux, Internet, réseaux sans fil, ...).

La file $M/M/1$ est le modèle le plus classique de la théorie des files d'attente. Au moins un livre lui est consacré en propre [17]. Les réseaux de Jackson et les réseaux de Kelly sont les deux grands classiques de la théorie des réseaux Markoviens, cf. par exemple [43, 64, 69].

Le modèle des files d'attente Markoviennes en tandem est relié à d'autres modèles apparaissant dans des contextes extérieurs aux SED. Le *processus d'exclusion totalement asymétrique* (*TASEP* dans la version acronymique et anglo-saxonne) est un modèle classique de système de particules en interaction dont le comportement asymptotique a été très étudié [50, 65]. La correspondance avec le modèle des files d'attente en tandem a souvent été remarquée et utilisée, voir par exemple la discussion dans Srinivasan [71]. Les *diagrammes et tableaux de Young* sont des objets importants en combinatoire et en théorie de la représentation des groupes, cf. Fulton [27]. L'analyse asymptotique des diagrammes de Young aléatoires a été menée pour diverses variantes, voir par exemple Vershik [73]. La correspondance entre tableaux de Young aléatoires et files d'attente en tandem est décrite, par exemple dans Seppäläinen [68]. Une autre connection existe avec la percolation de dernier passage. Plus précisément, le temps de séjour dans un réseau en tandem est égal au plus long chemin dans un graphe orienté valué. Ce lien s'obtient en déroulant les équations (26). La correspondance est trajectorielle, et donc non spécifique aux réseaux Markoviens. Elle a été utilisée à diverses reprises pour l'étude de l'asymptotique des grands réseaux en tandem [35, 72, 2, 53].

3 Evaluation de performances

On présente dans ce chapitre des résultats d'existence et de calcul de limite pour les itérés d'une application max-plus ou topicale.

3.1 Sous-additivité et existence du vecteur spectral

Considérons le monoïde de trace $\mathbb{M} = \langle a, b, c \mid ab = ba \rangle^+$. On note $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $\pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{M}$ le morphisme canonique.

La hauteur h d'un empilement est sous-additive, c'est-à-dire,

$$\forall u, v \in \mathbb{M}, h(uv) \leq h(u) + h(v), \quad \forall u, v \in \Sigma^*, h(uv) \leq h(u) + h(v). \quad (28)$$

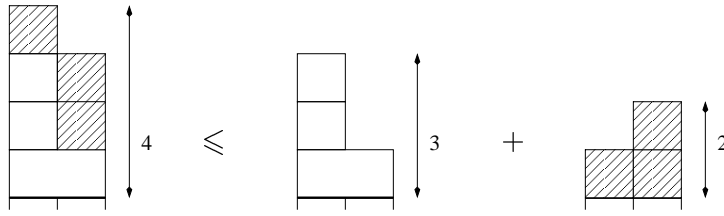


Figure 17: La hauteur maximale des colonnes est sous-additive.

On rappelle que $\forall u \in \mathbb{M}, h(u) = |u|_S$, la longueur par rapport à $S = \{a, b, c, ab\}$. Par ailleurs, on rappelle que $h(u) = \mathbf{o}^T \otimes \mathcal{M}(u) \otimes \mathbf{o}$ où \mathcal{M} est un morphisme max-plus (th. 2.6).

Plus généralement, la sous-additivité est une propriété de la longueur dans un monoïde. En effet, soit $(M, *)$ un monoïde et E un ensemble de générateurs. La *longueur* (par rapport à E) d'un élément m de M est définie par

$$|m|_E = \min\{k \mid m = u_1 * \cdots * u_k, u_i \in E\}.$$

On a alors : $\forall u, v \in M, |u * v|_E \leq |u|_E + |v|_E$.

Par ailleurs, la sous-additivité est une propriété de toutes les applications max-plus et plus généralement topicales.

Posons $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)$ (la dimension dépend du contexte) et, pour $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \lambda + \mathbf{x} = (\lambda + x_i)_i$. Pour T topicale, on note $[T] = [\mathbf{o}, T(\mathbf{o})] = \max_i T(\mathbf{o})_i$ et $\lfloor T \rfloor = \lfloor \mathbf{o}, T(\mathbf{o}) \rfloor = \min_i T(\mathbf{o})_i$. Soit $T \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), U \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$. En utilisant successivement la croissance et l'homogénéité additive, on trouve

$$T \circ U(\mathbf{o}) \leq T([U] + \mathbf{o}) = [U] + T(\mathbf{o}) \implies [T \circ U] \leq [U] + [T]. \quad (29)$$

Par un raisonnement symétrique, on montre que

$$\lfloor T \circ U \rfloor \geq \lfloor U \rfloor + \lfloor T \rfloor. \quad (30)$$

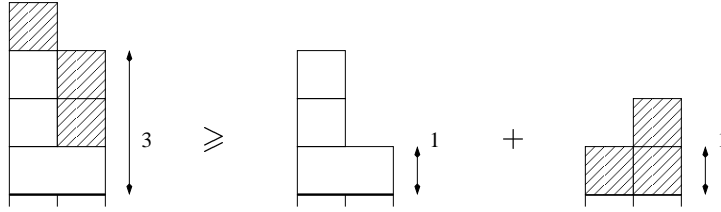


Figure 18: La hauteur minimale des colonnes est super-additive.

Pour les empilements, (30) s'interprète comme suit : la hauteur minimale d'une colonne est une quantité super-additive, illustration en fig. 18.

Soit $T \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. En combinant (19) et (29)-(30), on obtient par application directe du lemme sous-additif,

$$\exists \underline{\gamma}, \bar{\gamma} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor T^n(\mathbf{x}) \rfloor}{n} = \underline{\gamma}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lceil T^n(\mathbf{x}) \rceil}{n} = \bar{\gamma}. \quad (31)$$

Si $T = \mathcal{M}(u)$, $u \in \Sigma^*$, est l'application max-plus associée à l'empilement u , alors $\underline{\gamma}$, resp. $\bar{\gamma}$, est la vitesse de croissance de la plus petite, resp. plus grande, colonne de l'empilement u^n .

Étant donné une application topocale T , la question naturelle est de savoir si la suite $(T^n(\mathbf{x})/n)_n$ admet une limite dans \mathbb{R}^k . Si la limite existe, elle ne dépend pas de \mathbf{x} d'après le caractère 1-lipschitz de T par rapport à la norme sup, voir (19).

Définition 3.1. Soit T une application topocale. Posons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T^n(\mathbf{x})}{n} = \chi(T), \quad (32)$$

si la limite existe. On appelle alors $\chi(T)$ le vecteur spectral de T .

Pour des fonctions topocales générales, le vecteur spectral n'existe pas toujours [46, 39], et ce dès que $k \geq 3$. En voici un contre-exemple dû à Kohlberg et Sparrow. Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y + 1 \\ x + h(y - x) \end{pmatrix}$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne avec $0 \leq h' \leq 1$. On a $T^n(\mathbf{o}) = (0, n, h(n-1))$, et le vecteur spectral existe si et seulement si $h(n-1)/n$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. Or on peut aisément construire une application h lipschitzienne avec $0 \leq h' \leq 1$ et telle que $h(n-1)/n$ n'ait pas de limite, voir fig. 19.

A contrario, pour de larges classes d'applications topocales, le vecteur spectral existe.

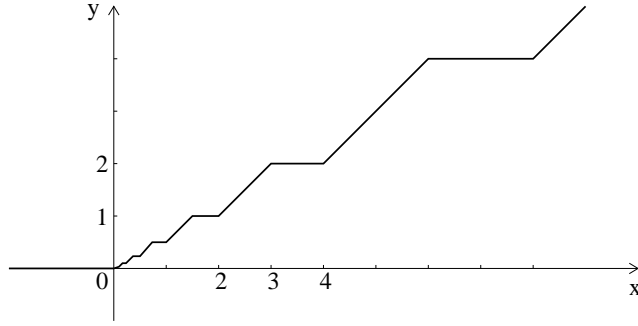


Figure 19: La fonction h du contre-exemple de Kohlberg et Sparrow.

Théorème 3.2. *Soit une application max-plus $T \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S)$. Le vecteur spectral $\chi(T)$, défini en (32), existe.*

Le résultat restant bien sûr vrai pour des applications min-plus. On aborde la question du calcul de $\chi(T)$ en §3.2.1.

Applications topicales

Le contre-exemple de Kohlberg et Sparrow montre que la classe des applications topicales est trop vaste pour avoir des propriétés dynamiques intéressantes. Dans Bousch & M. [11] on introduit la sous-classe des applications uniformément topicales qui, elles, ont de bonnes propriétés dynamiques. Explicitons ce cadre.

On note $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ avec sa topologie usuelle.

Définition 3.3. *Une application $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ est dite uniformément topicale si elle est topicale et admet un prolongement continu $\overline{T} : \overline{\mathbb{R}}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^\ell$. On note $\mathbf{UTop}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ l'ensemble des applications uniformément topicales de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^ℓ .*

La forme topicale $(x, y) \mapsto (x+y)/2$ n'est pas uniformément topicale. En revanche, toute application max-plus, min-plus, min-max-plus et conjuguée-linéaire est uniformément topicale.

Soit $T \in \mathbf{UTop}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$, on définit l'asymptote \widehat{T} par

$$\widehat{T} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell, \quad \mathbf{x} \mapsto \widehat{T}(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda T(\mathbf{x}/\lambda). \quad (33)$$

L'asymptote \widehat{T} est ce que l'on voit de T lorsqu'on la regarde de très loin. Lorsque T est max-plus, \widehat{T} est l'application max-plus définie comme suit :

$$\widehat{T}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } T_{ij} \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{si } T_{ij} = -\infty. \end{cases} \quad (34)$$

Dans le cas général, \widehat{T} est min-max-plus et chaque forme topocale \widehat{T}_i s'obtient par combinaison finie des fonctions coordonnées et des opérateurs \wedge et \vee .

Théorème 3.4. *Soit $T \in \mathbf{UTop}(\mathbb{R}^S, \mathbb{R}^S)$. Le vecteur spectral $\chi(T)$, défini en (32), existe.*

Lorsque T est une application min-max-plus, on peut préciser le résultat du Théorème 3.4. On aborde ce point en §3.2.2.

3.2 Calcul du vecteur spectral

Les théorèmes limites ci-dessus sont obtenus à l'aide d'un argument de sous-additivité. Il est bien connu qu'alors la constante limite est difficile à déterminer explicitement. On propose dans ce chapitre un panorama de quelques situations où le calcul est possible.

Supposons que l'on itère une unique application uniformément topocale. Alors le vecteur spectral, voir définition 3.1, existe, voir théorème 3.4. Ce vecteur devient explicitement calculable lorsque l'application est max-plus, §3.2.1, ou min-max-plus, §3.2.2. On aborde ensuite, §3.2.3, le problème de la maximisation des systèmes itérés d'applications max-plus qui se résout grâce aux résultats de la section 3.2.1. Le statut particulier de ce problème provient de la compatibilité de la *maximisation* avec la dynamique *max-plus*. La minimisation des systèmes min-plus se traite de façon duale : dans les théorèmes 3.20 et 3.21, il suffit de remplacer tous les max par des min.

3.2.1 Applications max-plus

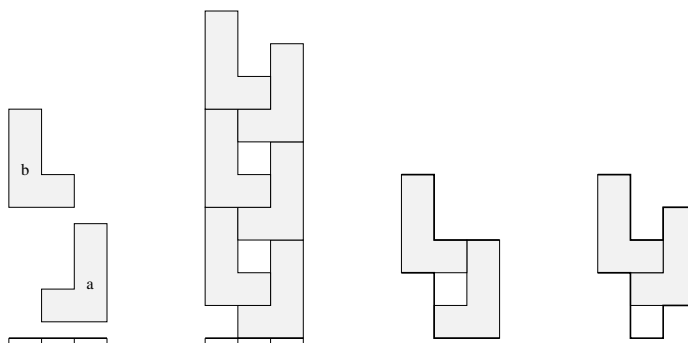


Figure 20: Empilement de deux pièces de Tetris.

Considérons le modèle de Tetris à deux pièces de la fig. 20 (gauche). Notons $T = T_b \circ T_a$ l'application max-plus associée à l'empilement ab , voir

§2.2. On obtient,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -\infty & 3 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On constate que la hauteur de l'empilement $(ab)^n$ est de l'ordre de $3n$ sur chaque colonne. L'empilement $(ab)^n$ étant associé à l'application itérée T^n , ceci fournit un argument géométrique permettant de calculer le vecteur spectral $\chi(T)$, dont l'existence était assurée par le cor. 3.2. On a, en effet,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \lim_n \frac{T^n(\mathbf{x})}{n} = (3, 3, 3) \implies \chi(T) = (3, 3, 3).$$

En fig. 21, on a représenté le graphe de T . On constate que la valeur 3 apparaissant dans le vecteur spectral est égale au poids moyen maximal d'un circuit du graphe. Il ne s'agit pas d'une coïncidence, voir th. 3.5.

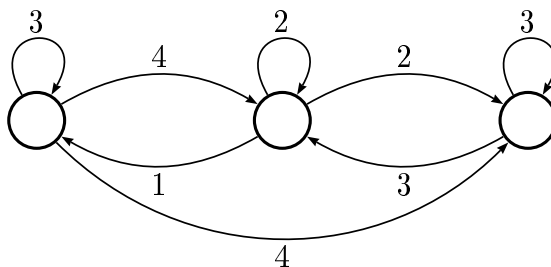


Figure 21: Le graphe de la matrice max-plus T .

Posons $\mathbf{u} = (0, -2, -2)$ et $\mathbf{v} = (0, -2, -1)$. On constate sur la fig. 20 (droite) que si on empile $(ab)^n$ sur un sol de forme \mathbf{u} , resp. \mathbf{v} , alors le profil supérieur de l'empilement est encore \mathbf{u} , resp. \mathbf{v} . En termes algébriques, pour tout n ,

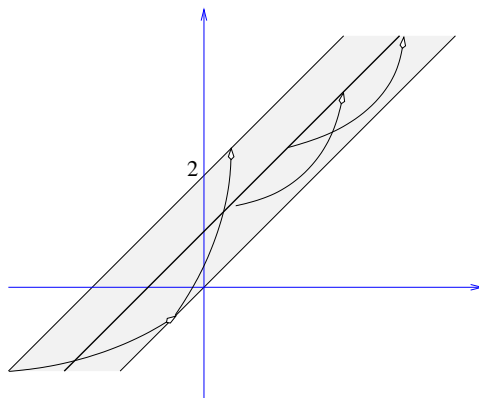
$$T^n(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + n\chi(T), \quad T^n(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + n\chi(T). \quad (35)$$

On appelle \mathbf{u} et \mathbf{v} des *points glissants* (*gliding points* en anglais) de T . On va voir qu'une application max-plus admet toujours des points glissants.

Avant d'énoncer des résultats généraux, considérons un second exemple pour se familiariser avec la dynamique des applications max-plus. Soit

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (36)$$

On peut analyser à la main la dynamique de l'application A . On obtient la fig. 22.

Figure 22: La dynamique de l'application max-plus A .

Soit Ω le tube de \mathbb{R}^2 représenté en gris sur la fig. 22. On observe que :

$$\forall \mathbf{x} \notin \Omega, A(\mathbf{x}) \in \Omega, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, A^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 4, \quad \forall \mathbf{x} = (x, x+1), A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2. \quad (37)$$

On déduit aisément de (37) que le vecteur spectral est $\chi(A) = (2, 2)$ et que $\mathbf{x} = (x, x + 1)$ est un point glissant de A , pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Énonçons maintenant le résultat principal, souvent appelé le “théorème spectral max-plus” ou le “théorème de Perron-Frobenius max-plus”. On peut écrire une version duale du théorème pour les applications min-plus, en remplaçant tous les max par des min.

Soit $A \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. On dit que A est *irréductible* si $\mathcal{G}(A)$, le graphe de A , est fortement connexe.

Théorème 3.5. *Soit $A \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. Si A est irréductible, alors $\chi(A) = (\gamma, \dots, \gamma)$ où γ est égal au poids moyen maximal d'un circuit (élémentaire) du graphe de A , c'est-à-dire*

$$\gamma = \max_{j \leq k} \max_{i_1, \dots, i_j} \frac{A_{i_1 i_2} + A_{i_2 i_3} + \dots + A_{i_j i_1}}{j}. \quad (38)$$

Dans le cas général, la formule explicite pour $\chi(A)$ s'obtient comme suit. Soit C l'ensemble de nœuds d'une composante fortement connexe non-triviale de $\mathcal{G}(A)$. Soit A_C l'application max-plus obtenue par restriction de A aux coordonnées C . Soit γ_C le poids moyen maximal d'un circuit de $\mathcal{G}(A_C)$. Pour $i \in C$, posons $\gamma_i = \gamma_C$. On a,

$$\chi(A) = (c_i)_i, \quad c_i = \max_{i \rightarrow j} \gamma_j, \quad (39)$$

où $\xrightarrow{*}$ est la fermeture réflexive et transitive de la relation \rightarrow de $\mathcal{G}(A)$. On a

$$\exists c, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \exists N, \forall n \geq N, \quad A^{n+c}(\mathbf{x}) = A^n(\mathbf{x}) + c\chi(A) \quad (40)$$

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \forall n \geq 0, \quad A^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + n\chi(A). \quad (41)$$

Si A est irréductible, on peut renforcer (40). On a alors

$$\exists c, \exists N, \forall n \geq N, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \quad A^{n+c}(\mathbf{x}) = A^n(\mathbf{x}) + c\chi(A). \quad (42)$$

L'exemple de l'application définie en (46) montre que la propriété (42) n'est pas vraie pour une application max-plus générale.

On peut donner une interprétation combinatoire du c apparaissant dans (40) et (42). La *cyclicité* d'un graphe fortement connexe est le pgcd des longueurs des circuits. La *cyclicité* d'un graphe est le ppcm des cyclicités des composantes fortement connexes. Le *graphe critique* de A est le sous-graphe de A obtenu en ne conservant que les nœuds et les arcs appartenant à au moins un circuit de poids moyen γ . L'entier c est la cyclicité du graphe critique de A .

Convexes max-plus.

On va décrire exactement l'ensemble des points glissants d'une application max-plus irréductible. On commence par introduire la notion d'enveloppe convexe max-plus.

Définition 3.6. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^k$ est un convexe max-plus si :*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad ((\lambda, \dots, \lambda) + \mathbf{u}) \vee ((\mu, \dots, \mu) + \mathbf{v}) \in E. \quad (43)$$

Étant donné un ensemble de points $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^k$, posons

$$K = \{ \mathbf{x} \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \mathbf{x} = \vee_{k=1}^n ((\lambda_k, \dots, \lambda_k) + \mathbf{u}_k) \}.$$

L'ensemble K est un convexe max-plus. On dit que K est le convexifié max-plus des points $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

On peut réécrire (43) en utilisant les notations matricielles max-plus. On obtient : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda \otimes \mathbf{u}) \oplus (\mu \otimes \mathbf{v}) \in K$. Ce qui a pour effet de faire ressortir l'analogie avec la notion usuelle de convexité.

Un convexe max-plus E est invariant par translation suivant la direction $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. On peut déterminer entièrement un convexe max-plus E par l'intermédiaire de sa projection orthogonale sur un hyperplan orthogonal à la direction $\mathbf{1}$. Le projeté de E est en bijection avec son image projective $\pi(E)$, voir déf. 2.17.

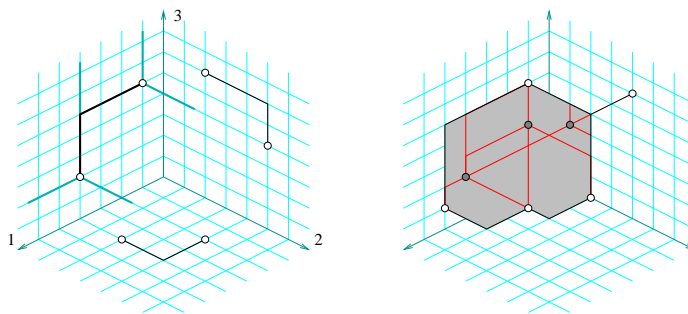


Figure 23: Visualisation projective des convexifiés max-plus de \mathbb{R}^3 .

Un convexe max-plus de \mathbb{R}^3 se visualise via sa projection dans \mathbb{R}^2 . Il existe une méthode simple pour dessiner la dite projection. Cette méthode, que l'on va maintenant décrire, est un analogue de celle utilisée pour déterminer l'enveloppe convexe usuelle.

Soit \mathbf{u} et \mathbf{v} les projetés de deux points de \mathbb{R}^3 . La projection du convexifié max-plus associé est une ligne brisée d'extrémités \mathbf{u} et \mathbf{v} et formée d'un ou deux segments de droite. On obtient cette ligne brisée comme suit. On trace à partir de \mathbf{u} et \mathbf{v} les projections des trois demi-axes positifs de coordonnées, et on conserve les segments de droite permettant de joindre \mathbf{u} et \mathbf{v} . Pour plus de deux points, le convexifié max-plus est la région délimitée par l'union des convexifiés max-plus des points pris deux par deux. On illustre la construction en figure 23.

On peut définir la notion de *convexe min-plus* en remplaçant les max par des min dans la définition 3.6. Concentrons nous sur les projetés dans \mathbb{R}^2 des convexes de \mathbb{R}^3 . N'importe quelle rotation d'angle $\pi/3$ permet de transformer le projeté d'un convexe max-plus en celui d'un convexe min-plus, et vice-versa.

Le résultat central sur les convexes max-plus est le suivant. Si E est le convexifié max-plus des points $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, on dit que $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ est une *famille génératrice* de E . Une famille génératrice est *minimale* si elle est minimale pour l'inclusion.

Théorème 3.7. *Soit K le convexifié max-plus d'un nombre fini de points. Deux familles génératrices minimales ont le même nombre de points. Soit $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ et $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ deux familles génératrices minimales de K . Il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\mathbf{u}_1 = (\lambda_1, \dots, \lambda_1) + \mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_n = (\lambda_n, \dots, \lambda_n) + \mathbf{v}_{\sigma(n)}.$$

En d'autres termes, il existe essentiellement une unique famille génératrice minimale. Sur les figures (23, 24, 25), les points de la famille

génératrice minimale sont représentés par des ronds blancs. Le cardinal de cette famille peut être arbitrairement grand dès que la dimension n de l'espace ambiant \mathbb{R}^n est supérieure ou égale à 3. La situation est analogue à celle des cônes convexes de \mathbb{R}_+^n . On illustre ceci en figure 24. De la gauche vers la droite, les familles génératrices minimales sont de cardinal 3, 6 et 12. L'étape suivante de cette construction récursive donnerait une famille génératrice minimale de cardinal 24.

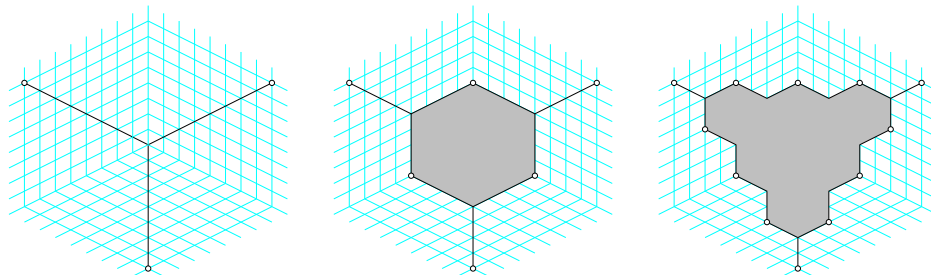


Figure 24: Le cardinal d'une famille génératrice minimale n'est pas borné.

Points glissants d'une application irréductible.

Soit A une application max-plus irréductible de vecteur spectral $\chi(A) = (\gamma, \dots, \gamma)$. Posons $x\mathbf{1} = (x, \dots, x)$. Si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont deux points glissants de A , alors on a, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et en application du th. 3.5,

$$\begin{aligned} A((\lambda\mathbf{1} + \mathbf{u}) \vee (\mu\mathbf{1} + \mathbf{v})) &= (\lambda\mathbf{1} + A(\mathbf{u})) \vee (\lambda\mathbf{1} + A(\mathbf{v})) \\ &= \gamma\mathbf{1} + (\lambda\mathbf{1} + \mathbf{u}) \vee (\mu\mathbf{1} + \mathbf{v}). \end{aligned}$$

L'ensemble des points glissants est donc un convexe max-plus. Son projeté est en bijection avec l'ensemble des points fixes de l'application quotient \tilde{A} , cf. définition 2.17. Par exemple, considérons les trois applications max-plus de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 de matrices respectives :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

On a représenté en figure 25 les projetés des ensembles de points glissants de A (gauche), B (milieu) et C (droite). Alternativement, on peut voir ces ensembles comme les ensembles de points fixes des applications quotient \tilde{A} , \tilde{B} et \tilde{C} . Les cardinaux des familles génératrices minimales sont respectivement 3, 3 et 2.

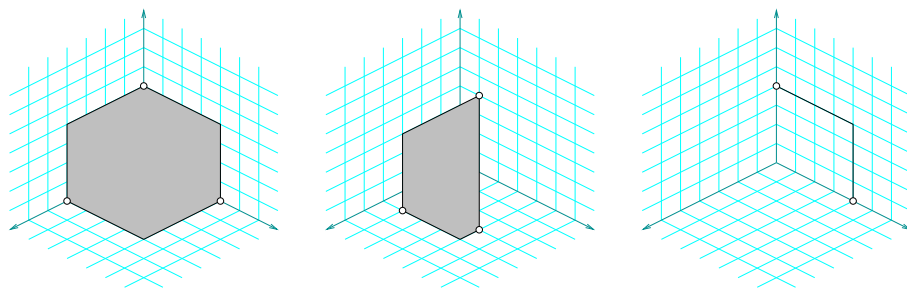


Figure 25: Projections des ensembles de points glissants de A , B et C .

D'une façon générale, l'ensemble des points glissants d'une application max-plus irréductible de \mathbb{R}^k est le convexe max-plus d'au plus k points. Énonçons le résultat.

Théorème 3.8. *Soit une application max-plus irréductible de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^k de matrice A . Soit γ le poids moyen maximal d'un circuit de A . Définissons $B \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times k}$ par : $\forall i, j, B_{ij} = A_{ij} - \gamma$. Posons $B^+ = \bigvee_{i=1}^{\infty} B^i$. La matrice B^+ est bien définie et vérifie $B^+ = \bigvee_{i=1}^k B^i$. L'ensemble des points glissants de A est un convexe max-plus dont la famille génératrice minimale s'obtient en sélectionnant une colonne de B^+ par composante fortement connexe du graphe critique de A .*

En corollaire des théorèmes 3.7 et 3.8, on obtient le résultat complémentaire suivant : si i et j appartiennent à la même composante fortement connexe du graphe critique de A , alors les colonnes correspondantes de B^+ sont égales à un coefficient additif près.

Valeurs propres et vecteurs propres max-plus.

Par analogie avec l'algèbre linéaire classique, il est naturel d'introduire la terminologie suivante.

Définition 3.9. *Soit $A \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. Supposons que l'on a, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ (et en utilisant les notations matricielles max-plus),*

$$A \otimes \mathbf{u} = \lambda \otimes \mathbf{u}.$$

Alors on appelle λ une valeur propre max-plus de A (ou de la matrice de A) et \mathbf{u} un vecteur propre max-plus associé.

Évidemment, si λ est valeur propre max-plus de A , alors $\chi(A) = \lim_n A^n(\mathbf{u})/n = (\lambda, \dots, \lambda)$. (La réciproque est vraie, voir prop. 3.11.) On en déduit qu'une application max-plus admet au plus une valeur propre max-plus.

Remarque. Certains auteurs, cf. par exemple [3], proposent une définition différente des valeurs propres et vecteurs propres max-plus en imposant simplement : $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^k$. Avec cette définition, une matrice max-plus peut avoir plusieurs valeurs propres.

Lorsque A est irréductible, on déduit du théorème 3.5 l'existence d'une valeur propre max-plus. D'autre part les vecteurs propres max-plus coïncident alors avec les points glissants.

En revanche, on déduit de (39) que A peut posséder une valeur propre max-plus sans être irréductible. Par exemple, considérons l'application

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 2 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Le graphe de A n'est pas fortement connexe. Néanmoins, si on pose $\mathbf{u} = (3, 1, 0)$, on trouve $A \otimes \mathbf{u} = 1 \otimes \mathbf{u}$. Donc 1 est valeur propre de vecteur propre associé \mathbf{u} . Le vecteur spectral est $\chi(A) = (1, 1, 1)$ ce que l'on aurait également pu déterminer à l'aide de (39).

Tubularité.

Définition 3.10. *Un tube de \mathbb{R}^k est un sous-ensemble K non-vide de \mathbb{R}^k , invariant par translation le long de la direction $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, et tel que le quotient $K/\mathbb{R}\mathbf{1}$ soit compact. Une application topicale $T \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ est tubulaire s'il existe un tube K de \mathbb{R}^k tel que $T(K) \subset K$.*

Le convexifié max-plus d'un ensemble fini de points de \mathbb{R}^k est un tube. Dans le cas max-plus, on peut caractériser précisément les applications tubulaires.

Proposition 3.11. *Soit $A \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ et soit $\chi(A)$ le vecteur spectral de A . On a les équivalences suivantes :*

- i. A est tubulaire;*
- ii. $\exists \gamma \in \mathbb{R}, \quad \chi(A) = (\gamma, \dots, \gamma)$;*
- iii. A possède un vecteur propre max-plus.*

Preuve. L'implication $[i \implies ii]$ est immédiate. Montrons l'implication $[iii \implies i]$. Soit \mathbf{u} un vecteur propre de A . L'ensemble $\{\mathbf{u} + (\lambda, \dots, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un tube laissé invariant par A . Donc A est tubulaire. Montrons l'implication $[ii \implies iii]$. D'après le théorème 3.5, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ tel que $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \chi(A) = \mathbf{x} + (\gamma, \dots, \gamma)$. Donc \mathbf{x} est un vecteur propre. □

On déduit de la proposition 3.11 qu'une application max-plus peut être tubulaire sans être irréductible. C'est le cas par exemple de l'application A définie en (45). Le graphe de A n'est pas fortement connexe, néanmoins le tube $\{(3, 1, 0) + (\lambda, \dots, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ est laissé invariant par A .

Semigroupe engendré par une application.

Soit $A \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. On rappelle que \tilde{A} est l'application quotient associée à A , cf. définition 2.17. On note $\langle A \rangle$ le semigroupe d'applications engendré par A , i.e. le semigroupe dont les éléments sont les applications $A^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit de même le semigroupe d'applications quotient $\langle \tilde{A} \rangle$.

On souhaite caractériser les applications pour lesquelles le semigroupe $\langle A \rangle$, resp. $\langle \tilde{A} \rangle$, est fini.

Concentrons nous sur (42). On peut traduire la propriété ainsi. Si A est irréductible, alors $\langle \tilde{A} \rangle$ est fini, et $\langle A \rangle$ est fini ssi $\chi(A) = (0, \dots, 0)$. On précise ce résultat dans la proposition suivante.

Proposition 3.12. *Le semigroupe $\langle A \rangle$ est fini ssi toutes les composantes fortement connexes non-triviales du graphe de A ont un poids moyen maximal égal à 0. Le semigroupe $\langle \tilde{A} \rangle$ est fini ssi toutes les composantes fortement connexes non-triviales du graphe de A ont le même poids moyen maximal.*

La comparaison des propositions 3.11 et 3.12 montre que la finitude de $\langle \tilde{A} \rangle$ est une propriété plus restrictive que la tubularité. Considérons par exemple l'application

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -1 \\ -\infty & -1 & -1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (46)$$

On vérifie que $\chi(A) = (0, 0, 0)$ et donc que A est tubulaire. Par contre le graphe de A possède des composantes fortement connexe de poids moyen maximal 0 et -1. Et donc $\langle \tilde{A} \rangle$ est infini. De fait, on a

$$A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -1 \\ -\infty & -n & -1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Perte de mémoire et généricité.

Définition 3.13. *Soit $T \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. On dit que T a la propriété de perte de mémoire si $\tilde{T}(\mathbb{R}^k/\mathbb{R}\mathbf{1})$ est un singleton (où \tilde{T} est l'application quotient introduite en définition 2.17).*

En travaillant un peu à partir du théorème 3.8, on obtient l'énoncé suivant.

Proposition 3.14. *Soit $A \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, irréductible. Il existe n tel que A^n ait perdu la mémoire si et seulement si le graphe critique de A est de cyclicité 1 et possède une unique composante fortement connexe.*

Lorsque le graphe critique de A possède une unique composante fortement connexe, on obtient en corollaire du théorème 3.8 que \tilde{A} possède un unique point fixe. Cependant, si la cyclicité du graphe critique est $c > 1$, il existe des orbites périodiques, i.e. des points distincts $x_0, \dots, x_{c-1} \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$\pi \circ A(x_0) = \pi(x_1), \pi \circ A(x_1) = \pi(x_2), \dots, \pi \circ A(x_{c-1}) = \pi(x_0). \quad (47)$$

On peut se convaincre de l'existence des orbites périodiques en observant que le graphe critique de A^c possède c composantes fortement connexes. Et donc que l'ensemble des vecteurs propres de A^c admet une famille génératrice minimale de cardinal c .

On déduit de (47) que, quelque soit n , $\tilde{A}^n(\mathbb{R}^k/\mathbb{R}\mathbf{1})$ n'est pas réduit à un singleton. Et donc que A^n n'a pas perdu la mémoire. En guise d'illustration, on peut considérer l'application définie en (36) dont la dynamique est résumée en (37).

La situation de perte de mémoire décrite dans la proposition 3.14 n'est pas générique. Par exemple, si A est choisie aléatoirement avec des coefficients i.i.d. et uniformes sur $[0, 1]$, alors le graphe de A possède avec probabilité 1 un unique circuit de poids moyen maximal, mais ce circuit est de longueur 1 avec probabilité petite. La longueur de ce circuit étant égale à la cyclicité, on en déduit que la perte de mémoire n'est pas générique.

Retour aux graphes d'événements.

Les GE temporisés (temporisations déterministes), cf. §2.6, fournissent un cadre naturel d'utilisation du th. spectral max-plus.

Définition 3.15. *On appelle débit de la transition a , le nombre de franchissements de a par unité de temps, c'est-à-dire la limite inférieure lorsque $t \rightarrow \infty$ de $N(t)/t$, où $N(t)$ est le nombre de franchissements de a entre les instants 0 et t .*

(Dans ce qui suit, la limite inférieure de $N(t)/t$ est en fait toujours une limite.) Soit A l'application max-plus associée au GE suivant la procédure de §2.6. Alors $\chi(A)$ donne l'inverse des débits de tirs des transitions. Un point glissant s'interprète comme un mode de fonctionnement périodique du

GE. On peut aussi exprimer le résultat directement sur le GE. Pour le cas fortement connexe, cela donne la prop. ci-dessous.

Proposition 3.16. *Dans un graphe d'événement fortement connexe vivant temporisé, toutes les transitions ont le même débit D qui est donné par*

$$D = \min_c \frac{M(c)}{T(c)}, \quad (48)$$

où c parcourt l'ensemble des circuits élémentaires, où $M(c)$ est égal au nombre de jetons de c et où $T(c)$ est égal à la somme des temporisations des places et transitions le long de c .

Considérons par exemple le GE de la fig. 8, les temps de tirs étant $\tau(a_0) = 1, \tau(a_1) = \ell_a, \tau(b_0) = 1, \tau(b_1) = \ell_b$, et les temps de séjours étant tous nuls. Le débit est $D = \min(1/(1 + \ell_a), 1/(1 + \ell_b), 1/(2 + \ell_a + \ell_b)) = 1/(2 + \ell_a + \ell_b)$.

Si on fixe la structure du graphe d'événements (le triplet $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$) et les temporisations, on peut voir le débit comme une application $D : \mathbb{N}^{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}_+$, associant à un marquage le débit correspondant. En particulier, si $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F}, M)$ n'est pas vivant, alors $D(M) = 0$. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad D(kM) &= kD(M) \\ \forall M, M' \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}, \quad D(M + M') &\geq D(M) + D(M'). \end{aligned}$$

On peut montrer ces propriétés directement à partir de (48). La super-additivité peut également se comprendre comme suit. Imaginons les jetons de M et de M' comme étant colorés respectivement en bleu et en rouge. Considérons le GE avec le marquage $M + M'$ et une sémantique de tir modifiée : l'habilitation et le tir d'une transition doit impliquer des jetons de *même* couleur. Le modèle résultant a un débit égal à $D(M) + D(M')$. Si on oublie les couleurs, on obtient le GE classique de marquage $M + M'$ et donc un débit $D(M + M')$. D'autre part, on a relâché une contrainte dans la définition de l'habilitation, et donc on a augmenté le débit : $D(M + M') \geq D(M) + D(M')$.

Une seconde application du th. spectral max-plus est proposée en §3.2.3.

Notes bibliographiques et compléments.

La théorie spectrale max-plus resurgit tel le serpent de mer dans de nombreux contextes et sous des formes diverses. Conséquence, les théorèmes 3.5 et 3.8 ont souvent et indépendamment été redémontrés, avec des degrés de précision et de généralité variés. Autre conséquence, il est à la fois difficile et un peu sensible d'attribuer avec exactitude la paternité des résultats !

Pour plus de précision, on peut se référer aux monographies [3, 19, 36, 42, 54] et à leur bibliographie respective.

Le calcul du poids moyen maximal d'un circuit dans un graphe, et donc celui du vecteur spectral d'une application max-plus, est un problème polynomial. Précisons cela. On reprend les notations du théorème 3.5. On a $\gamma = \max_{j \leq k} \max_i (A^j)_{ii}$. On en déduit que pour calculer γ , il suffit de déterminer A^2, \dots, A^k , d'où un algorithme dont la complexité en temps est en $O(k^4)$. Une meilleure approche consiste à utiliser la formule de Karp, valable pour tout j :

$$\gamma = \max_{i \leq k} \min_{\ell \leq k-1} \frac{(A^k)_{ij} - (A^\ell)_{ij}}{k - \ell}.$$

On peut en trouver la preuve, par exemple, dans [3, Theorem 2.19]. Ici, il suffit de déterminer la j -ième colonne de A^2, \dots, A^k , d'où un algorithme dont la complexité en temps est en $O(k^3)$. Il existe plusieurs autres algorithmes (programmation linéaire, itération sur les politiques à la Howard [15], ...). Une étude comparative très poussée est proposée par Dasdan [20].

On peut voir $(\mathbb{R}_{\max}^n, \vee)$ comme un \mathbb{R}_{\max} -semimodule, avec comme loi externe : $\mathbb{R}_{\max} \times \mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^n$, $(\lambda, \mathbf{u}) \mapsto (\lambda, \dots, \lambda) + \mathbf{u}$. Un convexe max-plus est alors appelé un (sous)semimodule.

Le théorème 3.7 est dû à Moller [58] et Wagneur [76]. La représentation graphique utilisée dans les figures 23, 24 et 25 a été introduite dans M. [51] pour étudier les ensembles de vecteurs propres des applications max-plus de \mathbb{R}^3 . La proposition 3.12 est démontrée dans Gaubert [29].

On peut analyser directement les GE temporisés, et démontrer la proposition 3.16, sans utiliser le formalisme max-plus, voir par ex. Carlier & Chrétienne [14].

3.2.2 Applications min-max-plus et topicales

Une application min-max-plus T est uniformément topicale donc, d'après le cor. 3.4, le vecteur spectral $\chi(T)$ existe. Essayons de le calculer sur un exemple. Soit l'application min-max-plus T donnée par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((y + 3) \vee (z + 2)) \wedge (x + 1) \\ y \wedge (z + 2) \\ (x - 1) \vee (y + 2) \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire l'application sous la forme $T = U_1 \wedge U_2 \wedge U_3 \wedge U_4$ où les U_i sont les applications max-plus de matrices respectives

$$\begin{pmatrix} -\infty & 3 & 2 \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -1 & 2 & -\infty \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -1 & 2 & -\infty \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\infty & 3 & 2 \\ -\infty & -\infty & 2 \\ -1 & 2 & -\infty \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 2 \\ -1 & 2 & -\infty \end{pmatrix}.$$

On a aussi $T = U_1 \wedge U_2 \wedge U_3$ ou $T = U_1 \wedge U_3 \wedge U_4$. Mais on verra, prop. 3.17, qu'il est essentiel de considérer toutes les décompositions possibles.

De façon symétrique, on peut réécrire l'application sous la forme $T = S_1 \vee S_2 \vee S_3 \vee S_4$, où les S_i sont les applications min-plus de matrices respectives,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & +\infty \\ +\infty & 0 & 2 \\ -1 & +\infty & +\infty \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & +\infty & 2 \\ +\infty & 0 & 2 \\ -1 & +\infty & +\infty \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & +\infty \\ +\infty & 0 & 2 \\ +\infty & 2 & +\infty \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & +\infty & 2 \\ +\infty & 0 & 2 \\ +\infty & 2 & +\infty \end{pmatrix}.$$

En utilisant la croissance des applications topicales, on obtient,

$$\begin{aligned} \forall i, S_i \leq T \leq U_i &\implies \forall i, \chi(S_i) \leq \chi(T) \leq \chi(U_i) \\ &\implies \max_i \chi(S_i) \leq \chi(T) \leq \min_i \chi(U_i). \end{aligned} \quad (49)$$

Maintenant, le th. 3.5 nous permet de déterminer explicitement les vecteurs spectraux $\chi(S_i)$ et $\chi(U_i)$, et donc la borne inférieure et la borne supérieure dans (49). Menons le calcul à bien :

$$\begin{aligned} \max_i \chi(S_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ \min_i \chi(U_i) &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Miracle : les bornes inférieures et supérieures coïncident. Ce qui permet de conclure que $\chi(T) = (1/2, 0, 1/2)$.

Ce miracle n'en est pas un (ou bien c'est un miracle qui se renouvelle). Énonçons le résultat général. L'uniforme topicalité a été définie en déf. 3.3.

Proposition 3.17 (Principe de sélection). *Soit $f_1, \dots, f_n, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ des applications uniformément topicales telles que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, il existe $i \in [1, n]$ tel que $f_i(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. Alors il existe $i \in [1, n]$ tel que $\chi(f_i) = \chi(g)$.*

Dans l'exemple précédent, les familles (U_1, U_2, U_3, U_4, T) et (S_1, S_2, S_3, S_4, T) vérifient le principe de sélection. On obtient donc qu'il existe i, j tels que $\chi(T) = \chi(S_i) = \chi(U_j)$. Au contraire, la famille (U_1, U_3, U_4, T) ne vérifie pas le principe de sélection, et, de fait, on a $\chi(T) \neq \chi(U_i), i \in \{1, 3, 4\}$.

Plus généralement, il est clair que le principe de sélection peut être utilisé pour toute application min-max-plus.

Corollaire 3.18. *Soit une application min-max-plus $T = \min_{i \in I} T^{(i)}$ avec I fini et $T^{(i)} \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ pour tout i . Soit $T_j^{(i)}, j = 1, \dots, k$, les formes coordonnées de $T^{(i)}$. Pour $x \in I^k$, soit $U^{(x)} \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ l'application dont les formes coordonnées sont $U_1^{(x)} = T_1^{(x_1)}, \dots, U_k^{(x)} = T_k^{(x_k)}$. On a,*

$$\chi(T) = \min_{x \in I^k} \chi(U^{(x)}), \quad \exists x \in I^k, \chi(T) = \chi(U^{(x)}).$$

En combinant le corollaire avec le th. 3.5, on obtient un procédé constructif pour calculer le vecteur spectral d'une application min-max-plus.

Les différentes preuves de la prop. 3.17 et du cor. 3.18 démontrent en parallèle l'existence d'un point glissant.

Proposition 3.19. *Une application min-max-plus $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ possède un point glissant.*

Références bibliographiques.

Pour les applications min-max-plus et plus généralement, les applications topicales affines par morceaux, l'existence du vecteur spectral a été démontrée par Bewley et Kohlberg [7, 46], d'une manière non constructive; par la suite, divers auteurs [77, 30, 67] ont retrouvé ce résultat, et ont donné des algorithmes de calcul du vecteur spectral dans le cas min-max-plus (efficaces en pratique, mais dont la complexité est encore mal comprise). Le principe de sélection, prop. 3.17, est prouvé dans Bousch & M. [11]. Le corollaire 3.18 qui en découle est le "théorème de dualité" démontré de façon différente par Gaubert & Gunawardena [30].

3.2.3 Maximisation des systèmes max-plus

Considérons le modèle de Tetris à deux colonnes et deux pièces de la fig. 26. On veut déterminer γ_+ , la vitesse de croissance maximale d'un empilement définie comme suit (où h est la hauteur) :

$$\gamma_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{u \in \Sigma^n} h(u). \quad (50)$$

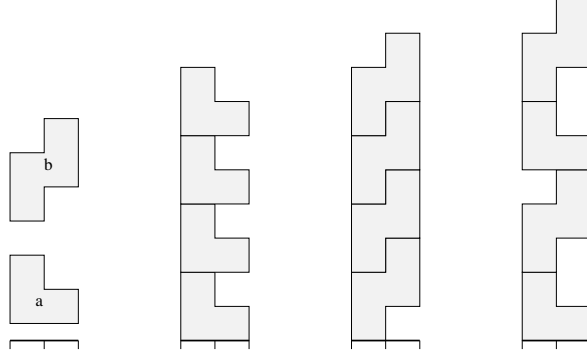


Figure 26: Modèle de Tetris et empilement pire des cas.

Posons $\Sigma = \{a, b\}$. Soit $(\mathbf{o}, \mathcal{M}, \mathbf{o})$ le triplet max-plus reconnaissant le modèle de Tetris, cf. th. 2.6. On a,

$$\max_{u \in \Sigma^n} h(u) = \mathbf{o} \otimes \max_{u \in \Sigma^n} \mathcal{M}(u) \otimes \mathbf{o} = \mathbf{o} \otimes \left(\max_{x \in \Sigma} \mathcal{M}(x) \right)^n \otimes \mathbf{o}. \quad (51)$$

Dans le terme du milieu et dans celui de droite, max est le maximum coordonnée par coordonnée. Posons $M = \max_{x \in \Sigma} \mathcal{M}(x)$. En utilisant le th. spectral max-plus, on déduit de (38) et (51) que $\gamma_+ =$ poids moyen maximal d'un circuit de M . On trouve donc,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \gamma_+ = \frac{5}{2}.$$

Par ailleurs le circuit $(1 \rightarrow 2 \rightarrow)$ est l'unique circuit de M de poids moyen $5/2$. Le long de ce circuit, le coefficient M_{12} provient de la matrice $\mathcal{M}(b)$ et le coefficient M_{21} de la matrice $\mathcal{M}(a)$. On en déduit que l'empilement $(ababab \dots)$ a une vitesse de croissance maximale.

Évidemment, on n'a pas *réellement* besoin de l'analyse qui précède pour déterminer la pire façon d'empiler les pièces a et b de la fig. 26 !

En revanche, l'approche se généralise à tout modèle de Tetris. Elle permet de déterminer explicitement γ_+ et un ordonnancement dans le pire des cas. On peut ainsi montrer qu'il existe toujours un tel ordonnancement avec une période contenant chaque pièce au plus une fois (pourquoi ?).

Plus généralement, l'approche s'étend à tout SIF max-plus. Proposons un énoncé.

Soit $(T_i)_{i \in I}$, un SIF max-plus, voir définition 2.20. On adopte la notation (22). Soit $\alpha_+ : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ la forme topocale définie par $\alpha_+(x_1, \dots, x_k) =$

$x_1 \vee \cdots \vee x_k$. Par sous-additivité, la limite suivante existe :

$$\gamma_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{u \in \Sigma^n} \alpha_+(\mathbf{o} \triangleleft u). \quad (52)$$

La constante γ_+ est la vitesse de croissance extrême pour le système itéré de fonctions. Dans (52), on peut remplacer \mathbf{o} par n'importe quel point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ sans modifier les valeurs des limites (caractère 1-lipschitz des applications topicales). En revanche, si on remplace α_+ par une autre forme topicale, par exemple une forme coordonnée, ou encore $\alpha_-(\mathbf{x}) = \min_i x_i$, alors on change la valeur des constantes limites.

Théorème 3.20. *Soit un système itéré de fonctions $(T_i)_{i \in I}$, $T_i \in \mathbf{Maxp}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. Soit γ_+ la vitesse de croissance maximale définie en (52). Alors γ_+ est égal au poids moyen maximal d'un circuit de la matrice M associée à l'application max-plus $\max_{i \in I} T_i$. En d'autres termes,*

$$\gamma_+ = \max_{1 \leq p \leq k} \max_{i_1 \dots i_p} \frac{M_{i_1 i_2} + \cdots + M_{i_p i_1}}{p}.$$

Soit $M(u)$ la matrice max-plus associée à T_u , $u \in I$. Soit u_{ij} une lettre de I réalisant le maximum dans $\max_{u \in I} M(u)_{ij}$. Soit (i_1, \dots, i_l) tels que $(M_{i_1 i_2} + \cdots + M_{i_l i_1})/l = \gamma_+$ et soit $w = u_{i_1 i_2} \cdots u_{i_l i_1}$. On obtient un mot infini maximisant à partir du motif w . Posons $www \cdots = w_1 w_2 \cdots$, $w_i \in I$. On a $\lim_n \alpha_+(\mathbf{o} \triangleleft w_1 w_2 \cdots w_n)/n = \gamma_+$.

On peut également proposer une version du résultat dans le cadre (légèrement plus large) des automates max-plus. La vitesse de croissance maximale d'un automate max-plus (α, μ, β) est définie comme suit :

$$\gamma_+ = \limsup_n \frac{1}{n} \max_{u \in \Sigma^n} \alpha \mu(u) \beta. \quad (53)$$

Un automate (α, μ, β) d'ensemble d'états Q et d'alphabet Σ est *émondé* si tout état appartient à un chemin réussi, c'est-à-dire :

$$\forall i \in Q, \quad \exists u, v \in \Sigma^*, \quad \alpha \mu(u)_i \neq -\infty, \quad \mu(v)_i \beta \neq -\infty.$$

Théorème 3.21. *Soit (α, μ, β) un automate max-plus émondé sur l'alphabet Σ . Alors γ_+ est le poids moyen maximal d'un circuit de la matrice $M = \max_{a \in \Sigma} \mu(a)$.*

Il faut prendre quelques précautions dans la manipulation des mots maximisants. Soit w un motif maximisant défini comme précédemment. Si u , resp. v , est l'étiquette d'un chemin menant d'un état initial à l'état i_1 , resp. de l'état i_1 à un état final, alors $\lim_n \alpha \mu(u w^n v) \beta / |u w^n v| = \gamma_+$.

Retour aux réseaux de Petri 1-bornés

Soit un RdP 1-borné et vivant $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{F}, M)$ de langage L , temporisé par $\tau : \mathcal{T} \sqcup \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Rappelons les résultats de la section 2.4. Soit $(\mathbf{o}, \mathcal{M}, \mathbf{o})$ l'automate max-plus du modèle de Tetris associé au RdP. Soit (α, μ, β) un automate max-plus reconnaissant le langage L , cf. §2.2. La *durée d'exécution* $h : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ ($h(w) = -\infty$ si $w \notin L$) est reconnue par l'automate tensoriel max-plus, cf. déf. 2.13,

$$\mathcal{A} = (\alpha \otimes^t \mathbf{o}, \mu \otimes^t \mathcal{M}, \beta \otimes^t \mathbf{o}).$$

On peut appliquer le théorème 3.21 à l'automate \mathcal{A} (après émondage préalable si nécessaire). La vitesse de croissance maximale γ_+ s'interprète naturellement. Appelons *débit total* la somme des débits des transitions. Le débit total dans le pire des cas du RdP est égal à $1/\gamma_+$. L'intérêt de ce résultat est de fournir une borne inférieure pour le débit total, quelque soit l'exécution infinie considérée.

Références bibliographiques.

L'utilisation du th. spectral pour l'analyse dans le pire des cas apparaît dans Gaubert [28]. On peut raffiner et jouer avec l'algèbre en calculant le pire des cas contraint par un langage algébrique L (on remplace Σ^n par $\Sigma^n \cap L$ dans (50)), voir [31]. L'application aux RdP présentée ci-dessus est une extension de ce type dans le cas simple où L est rationnel.

References

- [1] M. Ajmone-Marsan, G. Balbo, and G. Conte. *Performance Models of Multiprocessor Systems*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1986.
- [2] F. Baccelli, A. Borovkov, and J. Mairesse. Asymptotic results on infinite tandem queueing networks. *Probab. Theory Relat. Fields*, 118(3):365–405, 2000.
- [3] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [4] A. Barabasi and H. Stanley. *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] J. Berstel. *Transductions and context-free languages*. B. G. Teubner, 1979.
- [6] J. Berstel and C. Reutenauer. *Rational Series and their Languages*. Springer Verlag, 1988.
- [7] T. Bewley and E. Kohlberg. The asymptotic theory of stochastic games. *Math. Oper. Res.*, 1(3):197–208, 1976.
- [8] A. Bouillard, B. Gaujal, and J. Mairesse. Extremal throughputs in free-choice nets. *Discrete Event Dyn. Syst.*, 16(3):327–352, 2006.
- [9] T. Bousch. Fonctions topicales et causalité. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 13:489–498, 2006.
- [10] T. Bousch. Sur les retardateurs. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 43(1):31–46, 2007.
- [11] T. Bousch and J. Mairesse. Finite-range topical functions and uniformly topical functions. *Dynamical Systems*, 21(1):73–114, 2006.
- [12] M. Bousquet-Mélou and A. Rechnitzer. Lattice animals and heaps of dimers. *Discrete Math.*, 258(1-3):235–274, 2002.
- [13] M. Brilman and J.M. Vincent. Dynamics of synchronized parallel systems. *Stochastic Models*, 13(3):605–619, 1997.
- [14] J. Carlier and P. Chretienne. *Problèmes d’Ordonnement: modélisation, complexité, algorithmes*. Masson, Paris, 1988.
- [15] J. Cochet-Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, and M. MacGettrick. Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, 1998.

-
- [16] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. A linear system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. Automatic Control*, 30:210–220, 1985.
- [17] J.W. Cohen. *The single server queue*. North-Holland, Amsterdam, 1982. 2nd edition.
- [18] M. Crandall and L. Tartar. Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 78(3):385–390, 1980.
- [19] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*, volume 166 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, 1979.
- [20] A. Dasdan. Experimental analysis of the fastest optimum cycle ratio and mean algorithms. *ACM Trans. Design Automation Electronic Systems*, 9(4):385–418, 2004.
- [21] J. Desel and J. Esparza. *Free Choice Petri Nets*, volume 40 of *Cambridge Tracts Theoret. Comput. Sci.* Cambridge Univ. Press, 1995.
- [22] D. Dhar. Exact solution of a directed-site animals-enumeration problem in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 51(10):853–856, 1983.
- [23] V. Diekert. *Combinatorics on traces*. Number 454 in LNCS. Springer Verlag, 1990.
- [24] V. Diekert and Y. Métivier. Partial commutation and traces. In *Handbook of formal languages*, volume 3, pages 457–533. Springer, 1997.
- [25] V. Diekert and G. Rosenber, editors. *The Book of Traces*. World Scientific Publ., 1995.
- [26] S. Eilenberg. *Automata, languages and machines*, volume A. Academic Press, New York, 1974.
- [27] W. Fulton. *Young tableaux: With applications to representation theory and geometry*. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [28] S. Gaubert. Performance evaluation of $(\max,+)$ automata. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 40(12):2014–2025, 1995.
- [29] S. Gaubert. On semigroups of matrices in the $(\max,+)$ algebra. *Semigroup Forum*, 52:271–292, 1996.
- [30] S. Gaubert and J. Gunawardena. The duality theorem for min-max functions. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sr. I, Math.*, 326(1):43–48, 1998.

-
- [31] S. Gaubert and J. Mairesse. Task resource models and $(\max,+)$ automata. In J. Gunawardena, editor, *Idempotency*, volume 11, pages 133–144. Cambridge University Press, 1998.
- [32] S. Gaubert and J. Mairesse. Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 44(4):683–698, 1999.
- [33] B. Gaujal, A. Jean-Marie, and J. Mairesse. Computations of uniform recurrence equations using minimal memory size. *SIAM J. Computing*, 30(5):1701–1738, 2000.
- [34] B. Gaujal and J. Mairesse. Minimization of circuit registers: retiming revisited. *Discrete Appl. Math.*, 2008. To appear.
- [35] P. Glynn and W. Whitt. Departures from many queues in series. *Ann. Appl. Probab.*, 1(4):546–572, 1991.
- [36] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, 1979. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1986.
- [37] R. Griffiths. Frenkel-Kontorova models of commensurate-incommensurate phase transitions. In H. van Beijeren, editor, *Fundamental problems in statistical mechanics VII*. Elsevier Science Publishers, 1990.
- [38] J. Gunawardena. From max-plus algebra to nonexpansive mappings: a nonlinear theory for discrete event systems. *Theoret. Comput. Sci.*, 293(1):141–167, 2003.
- [39] J. Gunawardena and M. Keane. On the existence of cycle times for some nonexpansive maps. Technical Report HPL-BRIMS-95-003, HP Labs Bristol, 1995.
- [40] P. Haas. *Stochastic Petri Nets. Modelling, Stability, Simulation*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, 2002.
- [41] K. Hashigushi. Algorithms for determining relative star height and star height. *Inf. Comput.*, 78(2):124–169, 1988.
- [42] B. Heidergott, G.J. Olsder, and J. van der Woude. *Max Plus at Work: Modelling and Analysis of Synchronized Systems*. Princeton University Press, 2005.
- [43] F. Kelly. *Reversibility and Stochastic Networks*. Wiley, New-York, 1979.
- [44] D. Kirsten. Distance desert automata and the star height problem. *Theor. Inform. Appl.*, 39(3):455–509, 2005.

-
- [45] I. Klimann, S. Lombardy, J. Mairesse, and C. Prieur. Deciding unambiguity and sequentiality from a finitely ambiguous max-plus automaton. *Theoret. Comput. Sci.*, 327(3):349–373, 2004.
- [46] E. Kohlberg. Invariant half-lines of nonexpansive piecewise-linear transformations. *Math. Oper. Res.*, 5(3):366–372, 1980.
- [47] W. Kuich and A. Salomaa. *Semirings, Automata, Languages*. Springer Verlag, 1986.
- [48] C. Leiserson and J. Saxe. Retiming synchronous circuitry. *Algorithmica*, 6:5–35, 1991.
- [49] B. Lemmens and M. Scheutzwow. On the dynamics of sup-norm non-expansive maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(3):861–871, 2005.
- [50] T. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [51] J. Mairesse. A graphical approach of the spectral theory in the $(\max, +)$ algebra. *IEEE Trans. Automatic Control*, 40(10):1783–1789, October 1995.
- [52] J. Mairesse. *Tetris, traces et tresses. Modélisation, combinatoire et performances*. Habilitation, Université Paris 7, Paris, 2006.
- [53] J. Mairesse and B. Prabhakar. The existence of fixed points for the $\cdot/GI/1$ queue. *Ann. Probab.*, 31(4):2216–2236, 2003.
- [54] V. Maslov and S. Samborskii, editors. *Idempotent Analysis*, volume 13 of *Adv. in Sov. Math.* AMS, 1992.
- [55] A. Mazurkiewicz. Concurrent program schemes and their interpretations. Research report DAIMI Rep. PB-78, Aarhus Univ., 1977.
- [56] A. Mazurkiewicz. Trace theory. In *Petri Nets, Applications and Relationship to other Models of Concurrency*, number 255 in LNCS, pages 279–324. Springer Verlag, 1987.
- [57] M. Mohri. Finite-state transducers in language and speech processing. *Comput. Linguist.*, 23(2):269–311, 1997.
- [58] P. Moller. *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. PhD thesis, École des Mines, Paris, 1988.
- [59] T. Murata. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541–580, 1989.
- [60] R. Nussbaum. Periodic points of nonexpansive maps. In *Idempotency*, volume 11 of *Publ. Newton Inst.*, pages 231–241. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

- [61] J.E. Pin. Tropical semirings. In J. Gunawardena, editor, *Idempotency*, pages 50–69. Cambridge University Press, 1998.
- [62] C. Reutenauer. *The mathematics of Petri nets*. Prentice Hall Int., 1990.
- [63] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, and T. Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*, volume 377 of *Contemp. Math.*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., 2005.
- [64] P. Robert. *Stochastic networks and queues*, volume 52 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [65] H. Rost. Non-equilibrium behavior of a many particle process: density profile and local equilibria. *Z. Warsch. Verw. Gebiete*, 58:41–53, 1981.
- [66] J. Sakarovitch. *Éléments de théorie des automates*. Vuibert Informatique, Paris, 2003.
- [67] U. Schwiegelshohn and L. Thiele. Dynamic min-max problems. *Discrete Event Dyn. Syst.*, 9(2):111–134, 1999.
- [68] T. Seppäläinen. Hydrodynamic scaling, convex duality, and asymptotic shapes of growth models. *Markov Process. Related Fields*, 4:1–26, 1998.
- [69] R. Serfozo. *Introduction to stochastic networks*, volume 44 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [70] I. Simon. Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring. In *Mathematical Foundations of Computer Science, Proc. 13th Symp.*, number 324 in LNCS, pages 107–120, 1988.
- [71] R. Srinivasan. Queues in series via interacting particle systems. *Math. Oper. Res.*, 18(1):39–50, 1993.
- [72] W. Szczotka and F. Kelly. Asymptotic stationarity of queues in series and the heavy traffic approximation. *Annals of Probability*, 18:1232–1248, 1990.
- [73] A. Vershik. Asymptotic combinatorics and algebraic analysis. In Birkhäuser, editor, *Proceedings of the Int. Congress of Mathematicians, Zürich*, 1995.
- [74] G.X. Viennot. Problèmes combinatoires posés par la physique statistique. *Astérisque*, 121-122:225–246, 1985. Séminaire Bourbaki, 1983/84.
- [75] G.X. Viennot. Heaps of pieces, I: Basic definitions and combinatorial lemmas. In Labelle and Leroux, editors, *Combinatoire Énumérative*, number 1234 in Lect. Notes in Math., pages 321–350. Springer, 1986.

- [76] E. Wagner. Moduloids and pseudomodules. 1. dimension theory. *Discrete Math.*, 98:57–73, 1991.
- [77] U. Zwick and M. Paterson. The complexity of mean payoff games on graphs. *Theoret. Comput. Sci.*, 158(1-2):343–359, 1996.