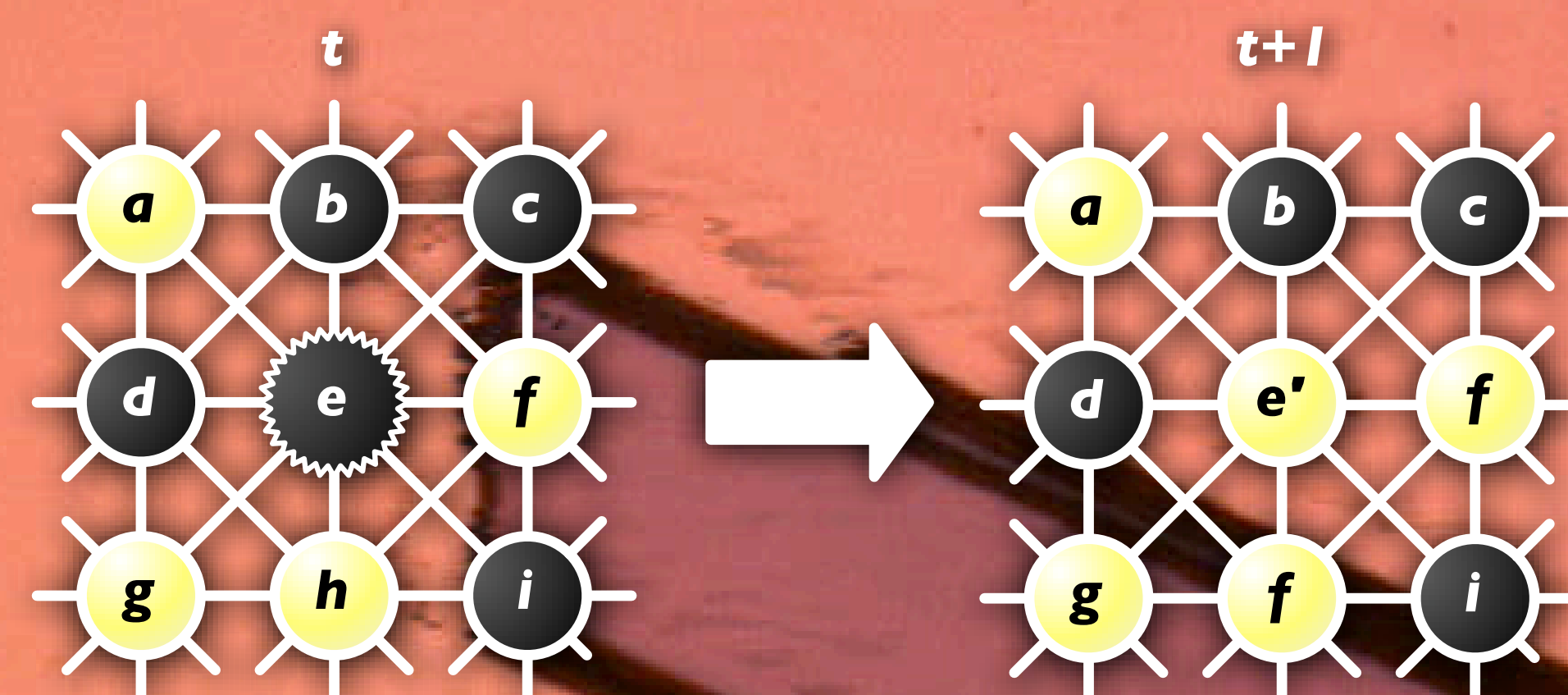


Modèle thermodynamique de croissance de cristaux à base d'automates cellulaires - Raissa D'Souza 1999

**Les systèmes réels sont particulièrement résistants à toute forme de perturbations, dont l'asynchronisme. Qu'en est-il des modèles classiques du réel, et tout particulièrement des automates cellulaires ?**

un **automate cellulaire** est un réseau de **cellules**, où chaque cellule **activée** au temps  $t$  passe au temps  $t+1$  dans un état déterminé par la **fonction de transition** de l'automate à partir de son état et des états des cellules voisines au temps  $t$ .



la cellule  $e$  activée au temps  $t$  passe au temps  $t+1$  dans l'état  $e' = \delta(a,b,c,d,e,f,g,h,i)$  déterminé par la fonction de transition  $\delta$  de l'automate

En **régime synchrone**, toutes les cellules sont activées à chaque temps  $t$ .




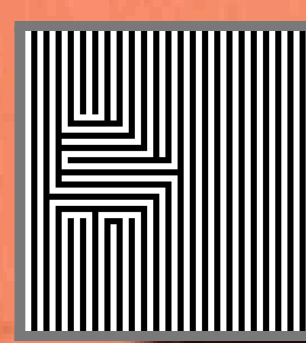

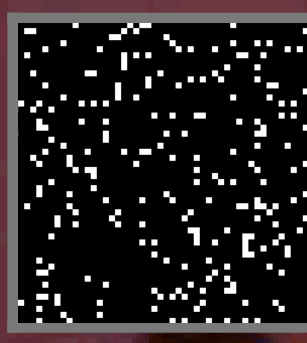
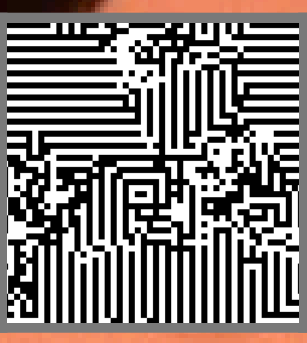

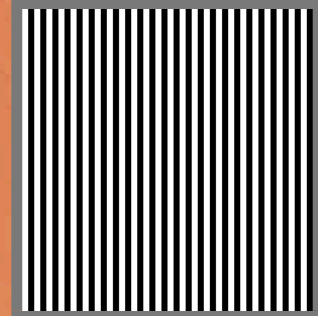

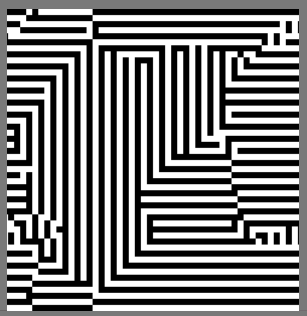

En **régime totalement asynchrone**, une seule cellule aléatoire est activée à chaque temps  $t$ .

En **régime  $\alpha$ -asynchrone**, chaque cellule est activée à chaque temps  $t$  indépendamment avec probabilité  $\alpha$ .

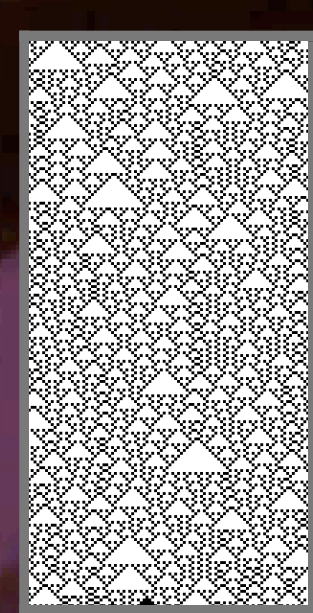

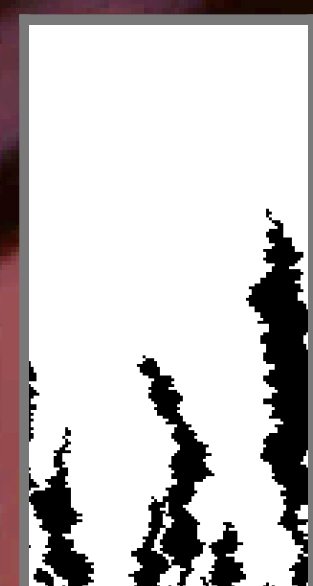
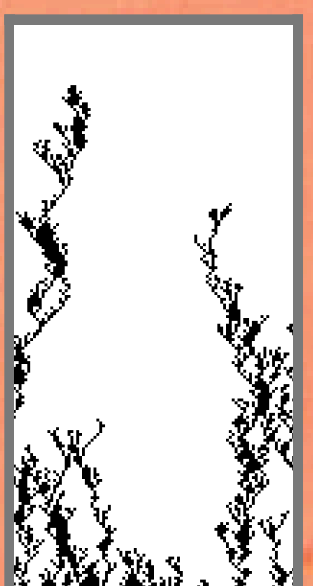
## Des comportements radicalement différents en fonction du taux d'asynchronisme

### Exemple : Automate Minorité 2D

chaque cellule activée passe dans l'état minoritaire de son voisinage

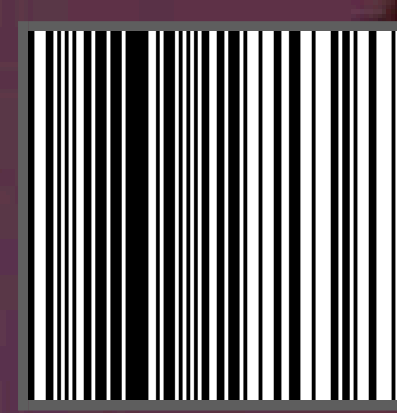


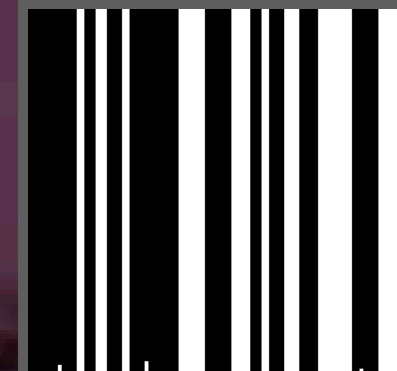
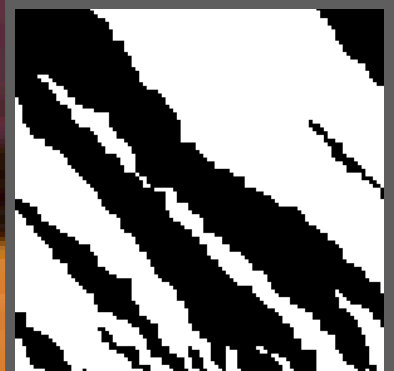
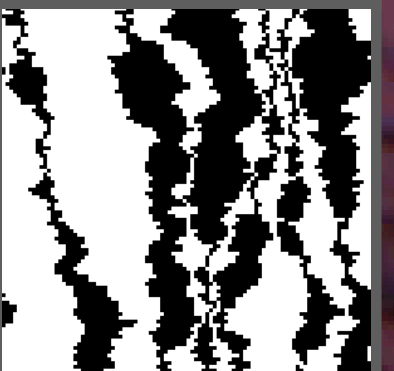
 configuration initiale	 du bruit grignote progressivement les zones pour $\alpha = 0.95$	 apparition de motifs à lignes parallèles pour $\alpha = 0.60$	 convergence rapide vers des lignes verticales ou horizontales pour $\alpha \rightarrow 0$
 configuration finale clignotante en régime synchrone	 convergence rapide (polynomiale) vers un fond uni bruité pour $\alpha = 0.90$	 expansion des zones à lignes parallèles qui finissent par tout recouvrir pour $\alpha = 0.55$	 une configuration stable plus exotique en régime asynchrone
 configuration finale stable en régime totalement asynchrone	 convergence vers des zones de densités variables et bruitées pour $\alpha = 0.70$	 apparition rapide de régions avec des frontières plus nettes pour $\alpha = 0.30$	 configuration de taille impaire typique en régime asynchrone

### Exemple : Automate 146 1D

 évolution typique en régime synchrone	 convergence en temps exponentiel vers la configuration tout blanc en régime $\alpha$ -asynchrone pour $\alpha > \alpha_c$ (ici, $\alpha = 0.70$ )
 convergence en temps polynomiale vers la configuration tout blanc en régime totalement asynchrone	 convergence en temps polynomiale vers la configuration tout blanc en régime $\alpha$ -asynchrone pour $\alpha < \alpha_c$ (ici, $\alpha = 0.50$ )

Un automate cellulaire 1D à deux états est **doublement quiescent (DQECA)** si les deux configurations tout blanc et tout noir sont stables (i.e. invariantes dans tous les régimes)

**Théorème [fmst2005]** Le comportement **totalement asynchrone** de chaque automate doublement-quiescent 1D est caractérisé par l'espérance de son pire temps de relaxation (i.e. le pire temps d'atteinte moyen d'une configuration stable) :

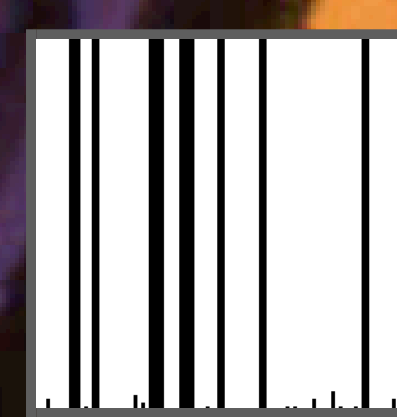
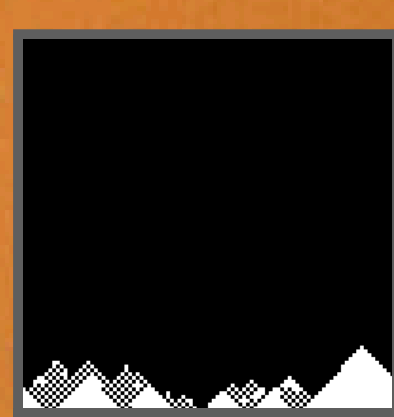
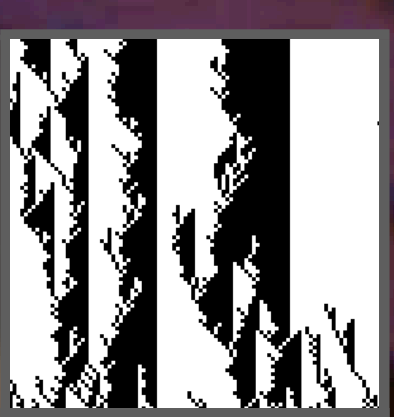
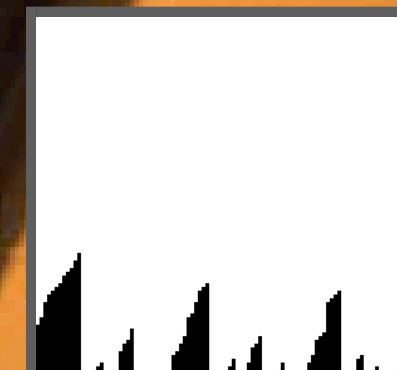
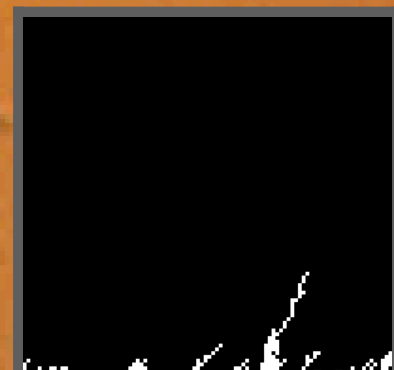

 <b>Identité (1 DQECA)</b> temps de relaxation = 0	 <b>Monotones (32 DQECAs)</b> temps de relaxation = $\Theta(n)$	 <b>Marches aléatoires biaisées fuyantes (4 DQECAs)</b> temps de relaxation = $\Theta(2^n)$
 <b>Collectionneurs de coupons (3 DQECAs)</b> temps de relax. = $\Theta(\ln n)$	 <b>Marches aléatoires non-biaisées (15 DQECAs)</b> temps de relaxation = $\Theta(n^2)$	 <b>Divergeant (9 DQECAs)</b> temps de relaxation = $\infty$

**Analyses à l'aide de variants aléatoires à base de marches aléatoires, de martingales et processus monotones**

**DQECA 170 (Shift) en régime totalement asynchrone** : Les frontières (en rouge) entre les zones blanches et noires suivent des marches aléatoires semblables à des particules coalescentes  
Variant = #cases noires

**DQECA 194 en régime  $\alpha$ -asynchrone** : les régions noires créent des noirs isolés à leur gauche avec probabilité  $\alpha^2$  et bien qu'aucune quantité décroissante ne semble évidente, le variant suivant décroît strictement en espérance :  
 $(6+4\alpha) \#N - \#BNN - (3+\alpha) \#NBN$

**Théorème [frst2006]** Les temps de relaxation de 48 des 64 automates doublement-quiescents 1D en régime  $\alpha$ -asynchrone sont

 <b>Collectionneurs de coupons (2 DQECAs) :</b> $\Theta(\alpha \ln n / \ln(1-\alpha))$	 <b>Collectionneur de coupons et Monotones après germination (13 DQECAs) :</b> $\Theta(n + 1/(1-\alpha))$	 <b>Marches aléatoires avec immobilisation des points isolés (8 DQECAs) :</b> $\Theta(n^2/(1-\alpha))$
 <b>Monotones (12 DQECAs) :</b> $\Theta(n)$	 <b>Monotones avec immobilisation des points isolés (8 DQECAs) :</b> $\Theta(n/(1-\alpha))$	 <b>Effritement des zones et immobilisation des points isolés (2 DQECAs) :</b> $\Theta(n/\alpha(1-\alpha))$

**Problème ouvert.** Les 12 autres ont des comportements que nous ne savons pas prouver actuellement. Certains exhibent par exemple des **transitions de phase polynomial/exponentiel** sur le temps de relaxation autour d'un taux d'asynchronisme  $\alpha_c$  critique (voir par exemple l'automate 146 ci-dessus).

#### Références bibliographiques.

[fmst2005] Fully asynchronous behavior of double-quiescent elementary cellular automata - nazim fatès, michel morvan, nicolas schabanel, éric thierry - MFCS 2005  
[frst2006] Asynchronous behavior of double-quiescent elementary cellular automata - nazim fatès, damien regnault, nicolas schabanel, éric thierry - LATIN 2006