Examen de Théorie et pratique de la concurrence

Vendredi 16 mai 2008
Notes de cours autorisées

Exercice 1 : Exclusion mutuelle

1. On considère les deux processus P et Q décrits par les algorithmes ci-dessous. Ils partagent deux variables entières $\mathtt{V}_1$ et $\mathtt{V}_2$.

```
    Processus P
    begin
      loop forever :
        (Section non critique)
p1      V1 := 1
p2      if V2 ≠ 0 then goto p1
p3      V2 := 1
p4      if V1 ≠ 1 then
p5        if V2 ≠ 1 then goto p1
        (Section critique)
p6      V2 := 0
    end
```

```
    Processus Q
    begin
      loop forever :
        (Section non critique)
q1      V1 := 2
q2      if V2 ≠ 0 then goto q1
q3      V2 := 2
q4      if V1 ≠ 2 then
q5        if V2 ≠ 2 then goto q1
        (Section critique)
q6      V2 := 0
    end
```

   (a) Montrer que cet algorithme ne garantit pas l'exclusion mutuelle pour l'accès à la section critique.

   (b) Proposer une solution et montrer qu'elle est correcte.

2. On considère à présent l'algorithme ci-dessous pour le processus P_i. L'instruction `delay` k permet d'attendre un certain délai k. Montrer que cet algorithme utilisé par n processus $P_1, \ldots, P_n$, partageant la variable `V` garantit l'exclusion mutuelle lorsque le délai d'attente k est suffisamment grand.

   A quoi correspond la valeur minimale (correcte) de k ?

François Laroussinie, Luca Fossati

Processus P_i
begin
  loop forever :
    (Section non critique)
p4   **repeat**
p1   **await** `V` $= 0$
p2   `V` $:= i$
p3   **delay** k
    until $V = i$
    (**Section critique**)
p5   `V` $:= 0$
end

Exercice 2 : CCS et Réseaux de Petri

Dans cet exercice, on considère une suite de n pompiers qui font la chaîne pour éteindre un incendie, en se passant des seaux.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, le i-ème pompier est défini par le processus CSS P_i suivant :

$$P_i \stackrel{def}{=} p_{i-1,i} \cdot \overline{p_{i,i+1}}\ P_i$$

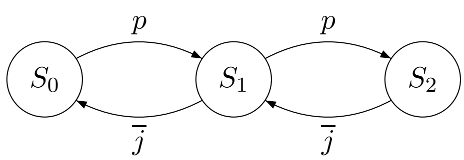
où $p_{i-1,i}$ correspond à l'action de prendre un seau du pompier $i-1$, pour $i > 1$, et $\overline{p_{i,i+1}}$ correspond à l'action de passer le seau au pompier $i+1$, pour $i < n$. Pour le premier pompier, on note simplement $p = p_{0,1}$ l'action correspondant à prendre le seau depuis le camion, et pour le dernier pompier, on note $j = p_{n,n+1}$ l'action correspondant à jeter l'eau sur le feu. Ainsi, pour $n = 2$, les deux pompiers sont définis par :

$$P_1 \stackrel{def}{=} p \cdot \overline{p_{1,2}}\ P_1 \text{ et } P_2 \stackrel{def}{=} p_{1,2} \cdot \overline{j}\ P_2$$

$$P_1 \stackrel{def}{=} p \cdot \overline{p_{1,2}}\ P_1 \text{ et } P_2 \stackrel{def}{=} p_{1,2} \cdot \overline{ja}\overline{a}\overline{j}\ P_2$$

   (a) Dessiner les systèmes de transitions de ces deux pompiers, ainsi que le système de transitions $\mathcal{T}_2$ associé au processus $(P_1 \parallel P_2) \setminus \{p_{1,2}\}$.

   (b) <u>Comparer</u> $\mathcal{T}_2$ avec le système de transitions suivant :

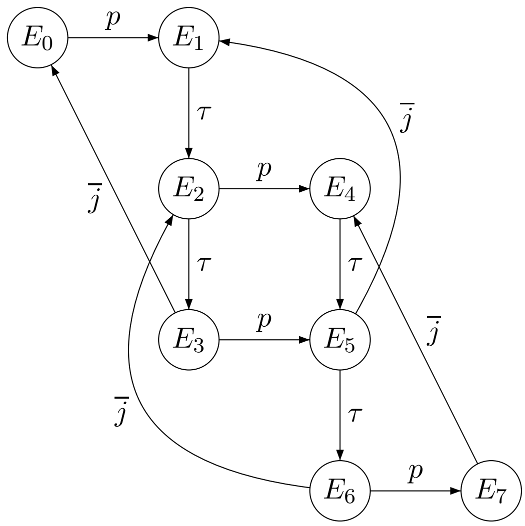


2. On considère maintenant trois pompiers :

$$P_1 \stackrel{def}{=} p \cdot \overline{p_{1,2}}\ P_1 \qquad P_2 \stackrel{def}{=} p_{1,2} \cdot \overline{p_{2,3}}\ P_2 \qquad P_3 \stackrel{def}{=} p_{2,3} \cdot \overline{j}\ P_3$$

et le système de transitions $\mathcal{T}_3$ associé au processus $(P_1 \parallel P_2 \parallel P_3) \setminus K$, pour $K = \{p_{1,2}, p_{2,3}\}$.

   (a) Montrer que le processus $(P_1 \parallel P_2 \parallel P_3) \setminus K$ est fortement bisimilaire à E_0 dans le système de transitions $\mathcal{T}_3'$ suivant :

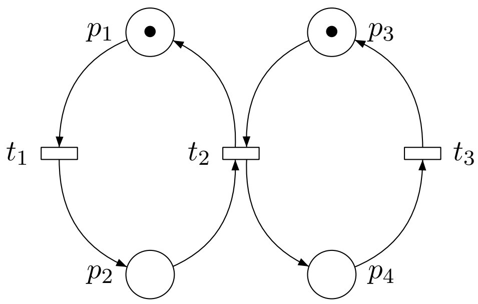


(b) i. Construire un système déterministe $\mathcal{D}_3$ acceptant le même langage que $\mathcal{T}_3'$, en considérant l'état E_0 comme initial et tous les états comme finaux.

ii. Montrer que $\mathcal{T}_3$ est faiblement bisimilaire à $\mathcal{D}_3$.

iii. Que suggérez-vous de montrer dans le cas général pour le système de transitions $\mathcal{T}_n$ correspondant à n pompiers ?

3. On considère le réseau de Petri suivant $\mathcal{N}_2$:



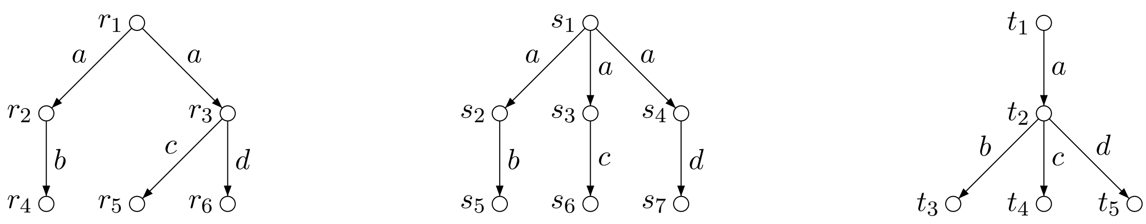
(a) Expliquer comment $\mathcal{N}_2$ peut s'interpréter comme deux pompiers se passant un seau. Donner la correspondance entre les transitions et les actions des processus précédents. Dessiner le graphe des marquages associé (en partant du marquage initial indiqué). Comment faut-il modifier les étiquettes du système de transitions obtenu pour qu'il soit bisimilaire (fortement) à $\mathcal{T}_2$?

(b) Dessiner un réseau de Petri $\mathcal{N}_3$ pour trois pompiers.

(c) On souhaite considérer le cas d'un pompier maladroit, qui laisse tomber un seau sans le passer à son voisin. En supposant que c'est le premier pompier, indiquer comment modifier $\mathcal{N}_2$ pour obtenir ce résultat. Comment faudrait-il modifier la définition de ce pompier en terme d'algèbre de processus pour obtenir un résultat similaire ?

Exercice 3 : Logique modale

1. Pour chaque formule Φ_i (de la logique HML) ci-dessous, donner un système de transitions étiqueté vérifiant Φ_i :
   (a) $\Phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle a\rangle(\langle a\rangle \mathtt{tt} \wedge [b]\mathtt{ff}) \wedge [b]\mathtt{ff}$
   (b) $\Phi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle a\rangle(\langle a\rangle \mathtt{tt} \vee \langle b\rangle \mathtt{ff}) \wedge \langle b\rangle \mathtt{tt}$
2. Etant donnés les trois systèmes de transitions étiquetés ci-dessous, donner une formule de HML vraie pour r_1 et fausse pour s_1 et t_1.



Exercice 4 : Bisimulation

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble d'états d'un système de transitions étiqueté $(S, \mathsf{Act}, \rightarrow)$ (NB : Act contient τ) est une *bisimulation branchante* ssi elle est symétrique et que pour tout $s\mathcal{R}t$ et $\alpha \in \mathsf{Act}$, si $s \xrightarrow{\alpha} s'$ alors on a :
- soit $\alpha = \tau$ et $s'\mathcal{R}t$,
- soit il existe $k \geqslant 0$ et une séquence de transitions $t = t_0 \xrightarrow{\tau} t_1 \xrightarrow{\tau} \ldots \xrightarrow{\tau} t_k \xrightarrow{\alpha} t'$ telle que $s\mathcal{R}t_i$ pout $i \in \{0, \ldots, k\}$ et $s'\mathcal{R}t'$.

On dit que deux états s et t sont *branchant-bisimilaires* (noté $s \sim_b t$) ssi il existe une bisimulation branchante les reliant.

1. Montrer que $s \sim_b t$ implique $s \approx t$.
   (on rappelle que $\approx$ correspond à la bisimulation faible).
2. Construire un système de transitions avec deux états s et t tels que $s \approx t$ et $s \not\sim_b t$.
3. Est-ce que $\sim_b$ est une congruence pour CCS ?
   (pour cette dernière question, on pourra admettre que $\sim_b$ est une relation d'équivalence)