# Équilibres de Nash Positionnels

Hugo Gimbert, LIAFA

But: prouver l'existence d'équilibres de Nash positionnels dans les jeux de routage.

Outil: Théorème du point fixe de Kakutani.

## Plan

1. Jeux, Stratégies et Équilibres de Nash
2. Jeux d'Accessibilité
3. Jeux de Routage

## Arènes

Joueurs: {0,. . . ,n}

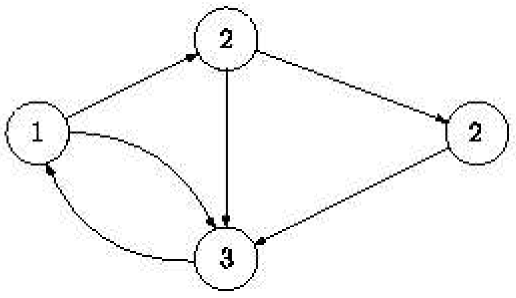
Arène: $G = (V, E)$ où $V = V_0 \sqcup \ldots \sqcup V_n$

$V_i$ : sommets du joueur $i$

Un jeton est posé sur un sommet.

Le propriétaire du sommet choisit la position suivante, etc...

Partie: chemin infini dans $G$

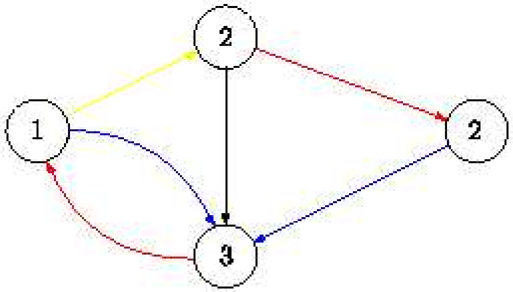


## Paiements

Arètes colorées $E \subset V \times C_0 \times \ldots \times C_n \times V$

Paiement du joueur $i$ $\phi_i : C_i^\omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Après une partie colorée par $c_0 c_1 \ldots \in C_i^\omega$, le joueur $i$ gagne $\phi_i(c_0 c_1 \ldots)$



## Stratégies

Stratégie pour le joueur $i$

Application $\sigma_i : E^* \to E$

Soit $p \in E^*$ une partie finie se terminant dans $V_i$.

Le joueur $i$ joue conformément à $\sigma_i$, en déplacant le jeton le long de l'arète $\sigma_i(p)$.

Stratégie positionelle $\sigma_i(p)$ ne dépend que du sommet sur lequel est situé le jeton.

## Équilibres de Nash

$n + 1$ joueurs $\{0, \ldots, n\}$

Pas de notion de stratégie optimale, mais notion d'équilibre.

Profil: $n + 1$ stratégies $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$

On note $p_\sigma$ la partie correspondante.

Équilibre de Nash: Profil tel que $\forall \sigma'_i$, le joueur $i$ gagne plus dans $p_{(\sigma_0,\ldots,\sigma_i,\ldots,\sigma_n)}$ que dans $p_{(\sigma_0,\ldots,\sigma'_i,\ldots,\sigma_n)}$. Il n'a pas d'intérêt à changer sa stratégie.

## Plan

1. Jeux, Stratégies et Équilibres de Nash
2. Jeux d'Accessibilité
3. Jeux de Routage

## Jeux d'accès

$V_0, \ldots, V_n \subset V$ des ensembles de sommets.

Piège Le joueur $i$ gagne 1 si la partie reste dans $V_i$, et 0 sinon.

Accès Le joueur $i$ gagne 1 si la partie passe par $V_i$, et 0 sinon.

Théorème: [Secchi, Sudderth 01] Tout jeu de piège stochastique possède un équilibre de Nash.

Théorème: [Chatterjee, Majumdar, Jürdzinski 04] Tout jeu d'accès stochastique possède un $\epsilon$-équilibre de Nash positionnel.

Correspondance $\phi : K \to \mathcal{P}(K)$. $\phi$ associe $(\sigma'_0, \ldots, \sigma'_n)$ à $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ si $\sigma'_i$ est une réponse optimale du joueur $i$ face à $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Équilibre de Nash positionnel $\iff$ point fixe de cette correspondance

On utilise le théorème du point fixe de Kakutani pour prouver l'existence d'un point fixe [Secchi, Sudderth 01].

Théorème de Kakutani (1941): $K$ compact d'un espace Euclidien.
$\phi : K \to \mathcal{P}(K)$ telle que

1. Pour tout $f \in K, \phi(f)$ est un fermé convexe et non vide.

2. Si $g_k \to g, f_k \to f$ et $\forall k \in \mathbb{N}, g_k \in \phi(f_k),$ alors $g \in \phi(f)$.

Alors $\phi$ possède un point fixe.

Théorème [Chatterjee, Majumdar, Jürdzinski 04] Tout jeu d'accès stochastique possède un $\epsilon$-équilibre de Nash positionnel.

Preuve On considère une version "discount" du jeu d'accès. Soit $\lambda \in ]0, 1[$. Atteindre $V_i$ au $j$ ème tour rapporte $\lambda^j$ au joueur $i$.

On utilise Kakutani pour l'existence d'un équilibre positionnel.

Pour $\lambda$ proche de 1, un équilibre dans le jeu discount est un $\epsilon$-équilibre dans le jeu original.

# Plan

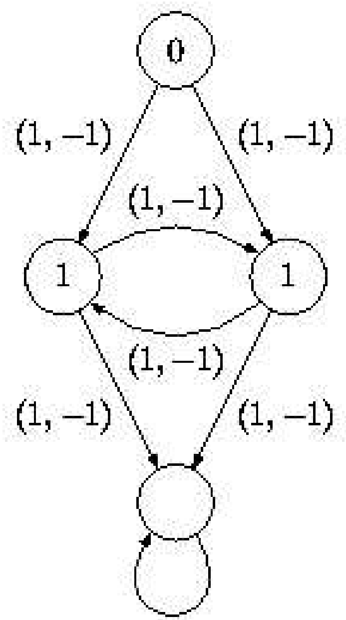
1. Jeux, Stratégies et Équilibres de Nash
2. Jeux d'Accessibilité
3. Jeux de Routage

## Jeu de routage

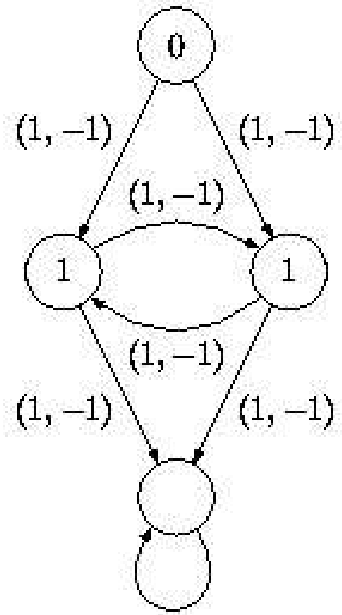
Une source, une cible. Arètes colorées par $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si la partie fait un cycle, tout le monde paye $+\infty$.

Sinon chaque joueur paye la somme des coûts vus au long de la partie.



Pas d'équilibre positionnel au jeu de routage [Gurvich 03]



## Cas des coûts positifs

Si les coûts sont positifs, existe t'il un équilibre en stratégies positionelles ? [Gurvich 03]

Réponse: oui.

## Cas des coûts positifs.

Passage par une version discount et infinie du jeu de routage.

Après avoir vu la suite de coûts $c_0, c_1 \ldots$, le joueur $i$ paye $\sum_i^\infty \lambda^i c_i$.

Soient $\mathcal{D}(E)$ les distributions de proba sur $E$. L'ensemble des stratégies est élargi aux stratégies positionnelles probabilistes.
$\sigma_i : V_i \to \mathcal{D}(E)$

On note $K$ l'ensemble des profils positionnels probabilistes.

Correspondance $\phi : K \to \mathcal{P}(K)$. $\phi$ associe $(\sigma'_0, \ldots, \sigma'_n)$ à $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ si $\sigma'_i$ est une réponse optimale du joueur $i$ face à $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Un profil $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ et $v \in V$. On note $val_i(v)$ l'espérance de gain maximale de $i$ dans le jeu discount, face à $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$.

$\sigma'_i$ est une réponse optimale si elle ne choisit avec probabilité $> 0$ que les arètes qui maximisent $val_i$.

On en déduit que $\forall f \in K, \phi(f)$ est un fermé convexe et non vide.

La continuité de $K \to \mathbb{R}^{n+1}$ qui associe à un profil l'espérance de gain des joueurs donne la condition 2.

On a construit un équilibre de Nash positionnel, pour chaque version $\lambda$-discounted et infinie du jeu de routage.

On choisit $\lambda_n \to 1$ et un équilibre qui apparaît infiniment souvent.

Comme les coûts sont positifs, c'est aussi un équilibre dans le jeu de routage.

On le dérandomise.

## Perspectives

Cas des jeux stochastiques concurrents.

Mélange de différentes fonctions de gains.

Preuve plus élémentaire.