# Comprendre notre monde avec les graphes, Cours Algo L3, 2015

Michel Habib
habib@liafa.univ-paris-diderot.fr
http://www.liafa.univ-paris-diderot.fr/~habib

Décembre 2015

# Plan du cours d'aujourd'hui

# Stanley Milgram 1933–1984, psychologue social américain

Très connu pour ses expériences de soumission à l'autorité

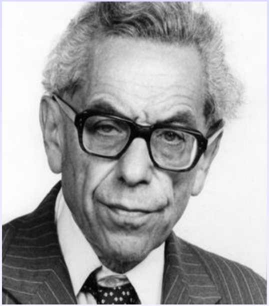
- Les six degrés de séparation (aussi appelée Théorie des 6 poignées de main) est une hypothèse proposée et popularisée par l'écrivain hongrois Frigyes Karinthy en 1929 qui évoque la possibilité que toute personne sur le globe peut être reliée à n'importe quelle autre, au travers d'une chaîne de relations individuelles comprenant au plus six maillons. Cette hypothèse était dans l'air du temps au début du siècle dernier.
- En 1967, Milgram a essayé de la valider expérimentalement : l'étude du petit monde.

- Milgram envoie 60 lettres à des recrues de la ville d'Omaha dans le Nebraska. Il leur demande de faire suivre cette lettre à un agent de change, vivant à une adresse fournie, dans la ville de Sharon dans le Massachusetts. Les participants pouvaient seulement passer les lettres, de main à main, à des connaissances personnelles qu'ils pensaient être capables d'atteindre l'objectif, directement ou via les amis des amis. Bien que cinquante personnes se soient prêtées à l'expérience, seulement trois lettres arrivèrent à destination. Le célèbre article de 1967 de Milgram décrit le fait qu'une lettre ne mit que quatre jours pour atteindre sa destination, mais négligea de mentionner que seulement 5 % des lettres réussirent à rejoindre leur cible.

# L'expérience de Milgram et les 6 degrés de séparation

- Envoi expérimental de lettres sans adresse avec un protocole de routage glouton.
- Sur chaque lettre doit figurer le nom, la ville et la profession du destinataire
- Cette célèbre expérience permet d'évaluer une distance moyenne entre personnes
- Autre exemple : la distance moyenne dans Facebook est inférieure à 5 (officiellement 4.74)

# Paul Erdös (1913–1996)



C'était un génie des mathématiques
1500 articles avec de très nombreux coauteurs (500).

# Erdös numbers

Mesure de la distance d'un auteur à Erdös.

- Les 500 coauteurs ont un nombre d'Erdös de 1
- $Erdosnumber = 2$ contient approximativement 10 000 mathématiciens (source Wikipedia).
  Chacun des 500 premiers aurait eu en moyenne 20 coauteurs nouveaux.
- Supposons que ces 10 000 amènent chacun 15 nouveaux auteurs. Il y aurait donc
  150 000 mathématiciens à distance 3 d'Erdös
- Si chacun de ceux-ci amènent encore 10 nouveaux auteurs.
  Cela fait 1 500 000 mathématiciens à distance 4 d'Erdös.

- Le Math Genealogy Project ne recense que moins de 200 000 mathématiciens (vivants ou non).
- D'autres sources ne recense que 50 000 mathématiciens vivants
- On peut en déduire que la grande majorité des mathématiciens vivants est à distance faible d'Erdös (moins de 4).

- Les six degrés de séparation (aussi appelée Théorie des 6 poignées de main) est une hypothèse proposée et popularisée par l'écrivain hongrois Frigyes Karinthy en 1929.
- La population mondiale en 1900 approx 1,5 Milliard (7 milliards aujourd'hui).
- Considérons un individu x, il possède 100 amis et supposons que chacun de ses amis amène au moins 100 amis nouveaux.

- Il faut résoudre l'équation :
  $100^d = 1,5 milliard = 1500000000$
- en prenant le $Log_{10}$ cela donne
  $d.Log(100) = 2d = Log(15) + Log(100000000) = 1,17 + 8$
  d'où $d = 4,585$
- Avec la population actuelle estimée à 7 milliards, l'équation donne :
  $2d = Log(7) + Log(1000000000$
  d'où $d = 1/2(0,845 + 9) = 4,922$ ce qui ne change pas grand chose !

Bien sûr, ce sont des estimations très simplistes, mais cela permet de comprendre pourquoi la distance moyenne
dans Facebook est de 4.74.

# Plus précisement

- Prenons un graphe régulier de degré $d$ et de diamètre $k$.
- le nombre de sommets est au plus :
  - $n \leq 1 + d.\Sigma_{i=0}^{i=k-1}(d-1)^i$
  - $n \leq 1 + \frac{d}{d-2}.[(d-1)^k - 1]$
  - ce qui est équivalent à $n \leq (d-1)^k$.
- Les graphes pour lesquels il y a égalité dans la formule ci-dessus sont les graphes de Moore.
  Pour d=3 et k =2 on retrouve le fameux graphe de Petersen à 10 sommets, mais il y a très peu de tels graphes.

- Pour terminer si chaque individu n'amène que 10 nouveau amis
  cela donne : $10^d = 7 milliards$
  $d = Log(7) + Log(1000000000) = Log(7) + 9 = 9,45$
- En conséquence, la composante géante humaine [1] a une distance moyenne petite.

1. Car il existe encore quelques communautés isolées

## Autres conséquences

- Si vous faites une application un peu virale, qui peut se propager rapidement :
  prévoyez un serveur de bonne taille !
- Cela explique pourquoi une vidéo peut faire rapidement un million de vues sur Youtube
- C'est aussi l'idée des pyramides de Ponzi.
  Montages financiers frauduleux introduits par Charles Ponzi (à Boston dans les années 1920).
  ou Bernard Madoff récemment.

# Notre époque : faire le buzz en quelques heures sur un réseau social

- On parle de propagation virale
- Mais cela revient à utiliser la nature exponentielle potentielle des sommets à distance k dans un graphe
- Par ex : celui des amis dans Facebook dans lequel vous avez potentiellement 1 milliard d'individus à distance 5.
- Le point de départ importe peu
- Cela peut avoir un effet important sur notre vie politique
- Ce qui explique pourquoi les gouvernements surveillent tous les réseaux sociaux

# La rapidité de diffusion

Cela caractérise notre époque, car sans l'électronique et les réseaux ce n'était pas possible

- Avec un journal classique on peut toucher au plus une famille.
- Avec le bouche-à-oreille et les rumeurs on peut faire du mal, mais la portée reste locale
- Avec un bon réseau social en 24h on peut toucher des millions d'individus.