Préparation au 1er partiel MPRI Algorithmique de graphes
Quelques exercices

Michel Habib

4 octobre 2016

NB : Exercises are indépendents, * means a more difficult problem.

1 2 easy queries and one not so easy

1. Could we write the searches DFS and BFS using partition refinement.
   In the Yes case, write them using this formalism.
2. What is the diameter of a cograph ? Explain how to compute it.
3. * Show that if G is an interval graph then :
   $diam(G) = 2$ iff G has a dominating clique.

2 Partition refinement

Let us consider partition refinement as it is used for modular decomposition.

A vertex x of a given part P_i is chosen and we refine all the other parts with $N(x)$.

We start the initial partition : $\{x, N(x), \overline{N(x)}\}$

Then depending if $|N(x)| \leq |\overline{N(x)}|$ do : $\forall y \in N(x)$ refine the partition of $\overline{N(x)}$

else $\forall y \in \overline{N(x)}$ refine the parttion of $N(x)$.

But doing so we could also do a symmetric refinement (refine backwards) (if $|N(x)| \leq |\overline{N(x)}|$) refine $N(x)$ by its neighbour in $\overline{N(x)}$.

1. How realize such a symmetric refinement ?
2. When it is done show that we can delete the edges between $N(x)$ and $\overline{N(x)}$.
3. Deduce from that an algorithm that computes the partition into maximal modules that do not contain x. Write carefully this algorithm.
4. * Show that its complexity is in $O(n + mlogn)$.
5. * Could you exhibit a non bounded set of graphs on which the algorithm is not linear ? Hint : you could try with $\Omega(n + nlogn)$?

3 Chordal graphs

Here the chordal graphs are supposed to be connected.

1. In a chordal graph how many maximal cliques a simplicial vertex can belong to ?
2. Deduce from that an algorithm that computes all simplicial vertices of a given chordal graph.
3. Does there exist a chordal graph for which in every maximal clique tree, there exists a simplicial vertex which does not belong to a leaf of the tree.
4. Let us consider a tie-break S of a LBFS σ on G.
   Show that σ behaves on the subgraph $G(S)$ as a normal LBFS.
5. ** Show that for any chordal graph G, there exist at least 2 diametral simplicial vertices x, y (i.e. x, y are simplicial and $d(x, y) = diam(G)$).

4 Graph powers

For an undirected graph $G = (X, E)$ we define $G^2 = (X, F)$ as follows :

$xy \in F$ iff $\exists$ a chain of length less or equal than 2 in G from x to y.

1. Let us consider σ a BFS ordering of the vertices of G, show that σ is a BFS ordering on G^2
2. Is the result also valid with DFS ? [1]
3. Same question with LBFS.
4. * Show that any power of an interval graph is still an interval graph.
5. * Show that any odd power of a chordal graph is still a chordal graph.
   Find a counter-example for even power (at least G^2).
6. * Let us consider a chordal graph G and σ a LBFS ordering of G, is σ a simplicial elimination scheme for G^3 ?
7. * Same question with G^{2k+1} with k integer ≥ 1.

5 Question de cours : Schémas d'élimination

1. Rappeler la définition d'un schéma d'élimination complet pour une propriété P dans un graphe.
2. A quoi cela peut-il servir ? (On peut prendre l'exemple des graphes cordaux).
3. Comment vérifier qu'un ordre total sur les sommets est un schéma d'élimination simplicial ?

1. For this question and the next one, either you give a proof or a counter-example (but not both !)

6 Maximal Neighbourhood Search (MNS)

Data: a graph $G = (V, E)$ and a start vertex s
Result: an ordering σ of V
Assign the label $\emptyset$ to all vertices
$label(s) \leftarrow \{0\}$
for $i \leftarrow 1$ ***to*** n **do**
  Choose an unnumbered vertex v with a maximal under inclusion label
  $\sigma(i) \leftarrow v$
  foreach *unnumbered vertex* w *adjacent to* v **do**
    $label(w) \leftarrow \{i\} \cup label(w)$
  end
end

1. Proposer deux implémentations différentes de complexité linéaire de MNS et une autre en $O(mlogn)$ et préciser les stratégies de choix associées.
2. * Proposer une implémentation qui puisse produire tous les ordres de visite MNS, complexité.

7 Structures des cliques maximales d'un graphe

On définit qu'un graphe G vérifie la propriété Helly sur ses cliques si pour lui ainsi que pour tous ses sous-graphes la famille des cliques maximales vérifie la propriété de Helly.

1. Montrer que les arbres vérifient la propriété Helly sur leurs cliques maximales
2. Que peut-on dire des graphes chordaux ainsi que des graphes d'intervalles : vérifient-ils cette propriété ?
3. * Proposer une caractérisation par sous-graphe(s) exclu(s) des graphes qui vérifient cette propriété.
4. On considère $K(G)$ le graphe d'intersection des cliques maximales d'un graphe, i.e., les sommets sont les cliques maximales de G et l'on met une arête entre deux cliques maximales si leur intersection est non vide. Montrer :
   G connexe ssi $K(G)$ connexe.
5. Montrer que pour certains graphes la taille de $K(G)$ peut être exponentielle en celle de G.
6. Proposer un algorithme de calcul de $K(G)$ lorsque G est un graphe chordal (complexité).

8 Reconnaissance des ordres de visite

On considère un graphe G non orienté et $\sigma_{\mathcal{P}}$ une ordre de visite de ses sommet à l'aide d'un parcours de graphe $\mathcal{P}$. Dans cette partie de l'examen nous allons étudier la question suivante :

Comment reconnaître algorithmiquement si un ordre total τ sur les sommets d'un graphe peut être obtenu comme l'ordre de visite d'un parcours de graphe $\mathcal{P}$ d'un certain type (BFS, DFS ou autre).

Pour ce faire nous pouvons utiliser toutes les propriétés de ces parcours, vues en cours ou autres à démontrer. Ces algorithmes peuvent permettre de certifier des algorithmes basés sur des parcours (par exemple des algorithmes calcul de diamètre à base de de parcours BFS).

1. Ecrire un algorithme de reconnaissance linéaire pour BFS
2. Ecrire un algorithme de reconnaissance linéaire pour DFS
3. * Proposer un algorithme pour LBFS (resp. LDFS)