TD 1 Algo de graphes

Michel Habib

November 20, 2017

1 Définitions de base

Rappel des définitions de base sur les graphes non orientés, composantes connexes, degré d'un sommet.

Nombres de Ramsey

2 Arbres

Montrer que les 6 conditions suivantes sont équivalentes et caractérisent les arbres :

1. G est connexe minimal (si on enlève une arête, le graphe n'est plus connexe)
2. G est sans cycle maximal (si on ajoute une arête, le graphe admet un cycle)
3. G est connexe sans cycle
4. G est connexe avec $n-1$ arêtes
5. G est sans cycle avec $n-1$ arêtes
6. $\forall x, y \in X$, il existe une chaîne unique joignant x à y.

3 Graphes non orientés

1. Considérons un graphe complet dont les arêtes sont colorées avec deux couleurs. Montrer qu'il existe toujours un arbre recouvrant monocoloré.

2. Montrer le théorème d'Euler : un graphe admet un cycle Eulérien (i.e. un cycle qui passe une fois et une seule par chaque arête) ssi tous ses degrés sont pairs.

3. Proposer un algorithme en $O(n + m)$ qui calcule un tel cycle Eulérien lorsqu'il existe.

4 Exercices sur les graphes orientés:

1. Montrer le théorème suivant:

   Pour un graphe orienté $G = (X, U)$ avec $|X| \geq 2$, les 6 conditions suivantes sont équivalentes et caractérisent les arborescences :

   (a) G est connexe sans cycle et admet une racine

   (b) G possède une racine et a $n - 1$ arcs

   (c) G possède une racine r et $\forall x \in X$, il existe un chemin unique de r à x

   (d) G possède une racine et est minimal avec cette propriété (tout retrait d'un arc de G supprime la propriété)

   (e) G est connexe et il existe un sommet $r \in X$, avec $d^-(r) = 0$ et $\forall x \in X$, $x \neq r$, $d^-(x) = 1$

   (f) G est sans cycle et il existe un sommet $r \in X$, avec $d^-(r) = 0$ et $\forall x \in X$, $x \neq r$, $d^-(x) = 1$

2. On appelle graphe fonctionnel un graphe orienté qui vérifie: $\forall x \in G$, $d^+(x) = 1$. Quelle est la structure de ces graphes ?

3. On considère un graphe G orienté connexe tel que: $\forall x \in G$ $d^+(x) = d^-(x)$, montrer que G est fortement connexe. Que peut-on dire d'autre sur la structure de G ?