

TD Algorithmique de graphes

L3 Informatique

Michel HABIB

27 novembre 2017

1 Arbres de poids minimum

1. Implémentation des algorithmes de Kruskal et Prim. Que dire de leur temps de calcul, comment les améliorer ?
2. On appelle *Pseudo-arbres_k* la classe des graphes non orientés connexes $G = (X, E)$ vérifiant : $|E| \leq |X| + k$. Analyser la complexité des algorithmes Prim, Kruskal sur cette classe de graphes.
3. Quel algorithme de calcul d'un arbre recouvrant de poids minimum vous paraît le meilleur sur ces graphes ?
4. Comment calculer un arbre recouvrant de poids maximum ?
5. Comment calculer un coarbre (complémentaire d'un arbre recouvrant) de poids minimum ?
6. À quelles conditions, l'arbre de poids minimum est-il unique ? Proposer une condition suffisante très simple, et montrer qu'elle n'est pas nécessaire.
7. * Proposer un algorithme qui calcule le deuxième arbre recouvrant de poids minimum.
8. Dans un cas où il existe plusieurs arbres de poids minimum distincts, écrire un algorithme qui calcule parmi ces arbres recouvrants de poids minimum, celui dont l'arête de plus fort poids est minimale.
9. * **Certificat** : On considère un graphe G et T un arbre recouvrant de G . Comment vérifier que T est un arbre recouvrant de poids minimum de G . Complexité de l'algorithme proposé.
10. Maintenance dynamique d'un arbre recouvrant de poids minimum. Une arête est détruite (panne), ou encore sa valuation augmente. Montrer comment gérer ces changements.
11. Peut-on minimiser aussi le diamètre de l'arbre recouvrant de poids minimum. On commencera par montrer qu'il existe des solutions optimales ayant des diamètres différents.

12. Ecrire un algorithme qui calcule s'il existe un arbre recouvrant de poids minimum de G dans lequel deux sommets fixés a et b sont pendants dans l'arbre. (i.e. $d_T(a) = d_T(b) = 1$).
13. Dans le cas où il n'existe pas un tel arbre de poids minimum, écrire un algorithme qui calcule le meilleur arbre recouvrant (s'il en existe un) vérifiant cette contrainte sur a et b .
14. Mêmes questions lorsqu'on remplace les sommets a et b , par un ensemble de sommets $S \subseteq X$.
15. * Comment minimiser le nombre de sommets pendants d'un arbre recouvrant de poids minimum ?
16. * Comment calculer une base de cycles de poids minimum ?

2 Le théorème du politicien

Si dans un groupe fini de personnes il s'avère que toute paire de personne ait exactement un ami commun. Montrer qu'il existe toujours une personne amie de tout le monde (i.e., le/la politicien.ne).