Examen: MPRI Algorithmique de graphes

Michel Habib

29 novembre 2011

NB : Les exercices sont indépendants, * signifie question un peu plus difficile.

1 Graphes chordaux

Dans cet exercice on considère un graphe connexe chordal G (ayant n sommets et m arêtes).

1. Existe-t-il un graphe chordal sur lequel pour tout arbre de cliques maximales, il existe un sommet simplicial qui ne soit pas dans une feuille de l'arbre ?
2. Considérons S un ensemble de tie-break dans un parcours σ LexBFS sur un graphe G. Par définition à une étape du parcours, les sommets de S ont les mêmes étiquettes.

   Montrer que σ se comporte sur les sous-graphe $G(S)$ comme un parcours LexBFS normal.
3. * Montrer que LexBFS se comporte sur le Graphe Réduit de Cliques comme un parcours générique (i.e. un parcours de graphe qui suit les arêtes). Est-ce un parcours Lexicographique sur ce graphe ?

   Rappel : le Graphe Réduit de Cliques est le graphe dont les sommets sont les cliques maximales de G et on met une arête entre deux cliques maximale si leur intersection est un séparateur minimal.

2 Modules

Etant donné des graphes non orientés $H = (X, E), H' = (X', E')$ et un sommet $x \in X$, on notera $G = H_x^{H'}$ le graphe obtenu en substituant dans le graphe H le sommet x par le graphe H'. Dans G les sommets de X' se comportent comme x dans H, autrement dit X' est un module dans G.

Plus formellement $G = (V, F)$ avec $V = (X\text{-}x) \cup X'$ et $F = \{zt \in E | z, t \neq x\} \cup \{yz | y \in X'$ et $xz \in E\} \cup E'$.

1. Quelles sont les classes $\mathcal{C}$ de graphes closes par substitution parmi les suivantes ?

   i.e. si $H, H' \in \mathcal{C}$ alors $\forall x \in H$, $G \in H_x^{H'}\mathcal{C}$.

   arbres, cographes, chordaux, planaires, permutation, treeewidth bornée par k, graphe de comparabilité.
2. * En déduire un algorithme de décomposition modulaire des graphes d'intervalles.

3 Graphe de comparabilité et d'intervalles

1. Si G est un graphe de co-comparabilité, monter que le dernier sommet d'un LexBFS peut être choisi comme une source (resp. un puits) dans une orientation transitive du complémentaire de G.
2. Montrer que G est un graphe d'intervalle ssi $\overline{G}$ admet une orientation transitive et que celle-ci ne contient pas $2+2$.
3. Montrer que si G est un graphe d'intervalle, il admet un schéma simplicial $x_1, \ldots. x_n$ tel que :

   $N(x_i) \subseteq N[x_{i+1}]$ voisinages dans $G(\{x_{i+1}, \ldots x_n\}$. En utilisant la notation $N[x] = N(x) \cup \{x\}$. Piste : trouver une interprétation géométrique.
4. La réciproque est-elle vraie ?

4 La décomposition en coupes

On dit qu'un graphe $G = (X, E)$ admet une décomposition en coupe, s'il admet une coupe F (ensemble d'arêtes qui sépare le graphe en deux composantes non connectées) entre deux sous ensembles non triviaux X_1, X_2 et $A \subseteq X_1, B \subseteq X_2$ tel que F soit un biparti complet entre A et B.

1. Montrer que cette décomposition généralise la décomposition modulaire.
2. Proposer un algorithme polynomial qui trouve une décomposition en coupe non triviale.

   Piste : on peut modéliser avec un nombre polynomial de $2 - SAT$.
3. En déduire un algorithme en $O(n.m)$.
4. Montrer que l'on peut définir un arbre de décomposition en coupe.
5. Proposer un algorithme linéaire.