Examen du cours de algorithmes de graphes, Magistère ENS Cachan

Michel Habib

23 mai 2011

1 Certificats

Rappelons qu'un certificat est une chaîne de caractères qui permet de vérifier le résultat d'un calcul. Par exemple si un programme répond qu'un nombre entier n est composé, deux entiers p, q tels que $n = pq$ constituent un certificat du fait que n ne soit pas premier.

Il s'agit de proposer des certificats pour les problèmes algorithmiques précisés ci-dessous. Dans chacun des cas, on précisera la taille du certificat en fonction de celle de la donnée, ainsi que la complexité de l'algorithme permettant de calculer le certificat ainsi que celle de l'algorithme qui permet de vérifier le certificat.

1. Le pgcd de deux nombres,
2. Les composantes connexes,
3. Les composantes fortement connexes,
4. Un plus court chemin entre deux sommets a et b
5. Un couplage de cardinal maximum,

2 Arborescences

On considère une arborescence A finie. Les feuilles de A sont étiquetées par des éléments d'un ensemble X. A est représentée par la fonction père (tout élément sauf la racine admet un père unique), et l'on suppose en outre que chaque noeud de l'arborescence possède une variable qui contient le nombre de ses enfants. On suppose qu'un pointeur permet d'associer à chaque élément de X la feuille qui lui correspond dans A.

Etant donné $S \subseteq X$ écrire un algorithme qui vérifie qu'il existe un noeud $a_s \in A$ tel que S corresponde à l'ensemble des feuilles de la sous-arborescence de A engendrée par a_s. Peut-on écrire un algorithme en $O(|A|)$?

3 Arbres de poids minimum

On considère un graphe $G = (X, V)$, muni d'une valuation $\omega : V \to N$.

1. Ecrire un algorithme qui calcule le 3ème meilleur arbre recouvrant de poids minimum, s'il existe.
2. On suppose disposer d'un arbre recouvrant T de poids minimum. Le poids d'une arête $xy \in V$ augmente d'une quantité $\delta > 0$, écrire un algorithme qui calcule le nouvel arbre recouvrant T' de G à partir de T.

4 Parcours en largeur étendu

On considère un graphe $G = (X, E)$ connexe et à partir d'un sommet initial s on construit les niveaux $L_0 = \{s\}$, $L_1 = N(s)$, … $L_i = \{$sommets à distance exactement i de $s\}$, …. Il est facile d'obtenir ces ensembles de sommets L_i à l'aide d'un simple parcours en largeur de G. Nous aimerions calculer $\forall i$ les sous-ensembles maximaux C_j de L_i vérifiant :

$\forall x, y \in C_j$ il existe une chaîne de x à y n'utilisant que des sommets des niveaux L_k, avec $k \geq i$.

Montrer que ces ensembles permettent de définir un arbre et proposer un algorithme efficace pour les calculer.

5 Flots et parité

On considère un réseau de transport $R = (X, U)$ dont les capacités sont entières.

1. Un flot entier est dit pair (resp. impair) si toutes ses valeurs sont paires (resp. impaires). Est-il vrai que :

   (a) si toutes les capacités sont paires, il existe un flot maximum pair.

   (b) si toutes les capacités sont impaires, il existe un flot maximum impair.
2. Est-il possible qu'il existe un flot maximum sur R qui ne soit pas à valeurs entières ?
3. Proposer un algorithme qui le transforme en un flot maximum entier.