Examen d'algorithmique de graphes, L3 ENS Cachan

Michel Habib

11 janvier 2018

Les exercices sont indépendants et tous les graphes manipulés ici sont supposés finis.

1 Pour démarrer

On dit qu'un graphe $G = (X, U)$ est fortement (resp. k-fortement avec $k > 1$) connexe si :
$\forall x, y \in X$, $x \neq y$, il existe un (resp. k arc-disjoint) chemin de x à y.

1. Montrer que si pour tout $x \in V(G)$, $d^+(x) = d^-(x) > 0$, alors chaque composante connexe de G est fortement connexe.
2. Montrer que si pour tout $x \in V(G)$, $d^+(x) = d^-(x) = k > 1$, alors chaque composante connexe de G est k-fortement connexe.
3. Les propriétés des précédentes questions admettent-elles une réciproque ?

2 Réseaux sociaux

On considère un graphe non orienté dont toutes les arêtes sont marquées $+$ ou $-$. Ces marques signifient aimer (resp. détester) ou encore ami (resp. ennemi).

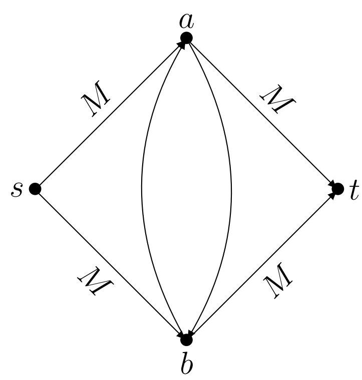
1. Un marquage est dit équilibré si pour tout cycle le produit des marques est positif.
2. Ecrire un algorithme qui reconnaisse si le marquage d'un graphe est équilibré.
3. En déduire une caractérisation de la classe $\mathcal{C}$ des graphes qui admettent un marquage équilibré.

4. * Etant donné un graphe $G \in \mathcal{C}$ et un marquage de ce graphe, proposer un algorithme qui équilibre ce marquage en changeant un nombre minimum de marques.
5. Etant donné un graphe G et un marquage proposer un algorithme qui vérifie sur les triangles du graphe une régularité du type :

   les amis de mes amis sont mes amis

   Que peut-on en conclure ?

3 Exercices sur les flots dans les graphes



Les arcs ab et ba ont une capacité $2M$

1. Montrer sur l'exemple de la Figure 1, que l'on peut ajouter à tout flot ϕ une valeur ϵ sur le circuit $[a, b, a]$ et obtenir un nouveau flot ϕ' tel que : $\phi(s,t) = \phi'(s,t)$.
2. On appelle flot normal un flot dont tous les circuit positifs utilisent l'arc ts.

   Montrer qu'à tout flot ϕ on peut associer un flot ψ normal tel que $\psi(t,s) = \phi(t,s)$.
3. Proposer un algorithme qui vérifie qu'un flot donné ϕ est normal.
4. Montrer que tout flot normal se décompose comme une somme de chemins positifs de s à t.
5. Considérons un graphe pour lequel tous les circuits passent par les sommets s et t.

   Dans ce cas le flot maximum est-il unique (en tant que vecteur) ?

6. * Existe-t-il des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour l'unicité d'un flot maximum (en tant que vecteur).
7. Montrer comment utiliser la théorie des flots pour calculer l'existence de k chemins arc-disjoints entre les sommets s et t.
8. * Lorsque ces chemins existent comment calculer k plus courts chemins arc-disjoints entre les sommets s et t.

4 2 plus courts chemins

1. Montrer sur un exemple que le problème de la recherche de deux plus courts chemins arc-disjoints entre s et t est différent de celui de la recherche des 2 plus courts chemins entre s et t.
2. * Montrer qu'avec deux applications successives de l'algorithme de Dijkstra il est facile de calculer deux plus courts chemins arc disjoints de s à tous les autres sommets.

5 Flots et parité

On considère un réseau de transport $R = (X, U)$ dont les capacités sont entières.

1. Un flot entier est dit pair (resp. impair) si toutes ses valeurs sont paires (resp. impaires).

   Est-il vrai que :

   (a) si toutes les capacités sont paires, il existe un flot maximum pair.

   (b) si toutes les capacités sont impaires, il existe un flot maximum impair.
2. Est-il possible qu'il existe un flot maximum sur R qui ne soit pas à valeurs entières ?
3. Proposer un algorithme qui le transforme en un flot maximum entier.

6 *Codages de graphes

Notons $\overline{G}$ le complémentaire d'un graphe orienté G. Pour l'obtenir à partir de la représentation matricielle il suffit de remplacer les 0 par des 1 et vice-versa.

Nous disposons d'un graphe orienté G défini par ses listes de successeurs.

Est-il possible de calculer en $O(|V(G)| + |A(G)|)$ les composantes fortement connexes du complémentaire de G (i.e., sans calculer la représentation par listes de successeurs du complémentaire) ?